Strutture hermitiane e speciali su prodotti di sfere

Maurizio Parton

Questa tesi si compone di due parti.

Nella prima (capitolo 1 della tesi) si affronta il problema dell'esistenza di particolari metriche hermitiane su superfici di Hopf e se ne determina una famiglia. Tale famiglia di metriche determina una foliazione in rette complesse, e le superfici di Hopf ellittiche vengono caratterizzate come quelle per cui tale foliazione ha tutte le foglie compatte. Nel caso ellittico viene infine mostrato che la fibrazione ellittica è data proprio dalla proiezione canonica sullo spazio delle foglie, mettendo così in relazione una proprietà puramente complessa (l'ellitticità) con una proprietà metrica (la foliazione è determinata dalle metriche).

Nella seconda (capitoli 2, 3 e 4 della tesi) si affronta e si risolve completamente il problema di trovare, sui prodotti di sfere parallelizzabili, parallelizzazioni date in forma esplicita (dove con esplicita si intende in termini delle coordinate standard sulle sfere). Queste parallelizzazioni sono allora usate per definire G-strutture sui prodotti di sfere. In tal modo si ottengono sia nuove strutture, sia codifiche originali e compatte di strutture ben note: ad esempio, le strutture hermitiane $I^{m,n}$ di Calabi-Eckmann su $S^m \times S^n$, m e n dispari, sono date nella parallelizzazione $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{m+n}\}$ da $I^{m,n}(p_1) = p_2, \dots, I^{m,n}(p_{m+n-1}) = p_{m+n}$.

1. – Metriche localmente conformi Kähleriane su superfici di Hopf e fibrazioni ellittiche

Le superfici complesse si dividono in kähleriane e non kähleriane, e le non kähleriane sono tutte e sole quelle con primo numero di Betti dispari. Esiste una versione più debole dell'ipotesi kähleriana che sia verificata da tale classe di superfici complesse? È in questo contesto che Izu Vaisman introduce nel 1976 la nozione di metrica che è localmente conforme a metriche kähleriane. Tali metriche determinano una 1-forma chiusa e non esatta ω (la *forma di Lee*) sulla superficie, e la metrica si dice *di Vaisman* se ω è parallela rispetto alla sua connessione di Levi-Civita. Fino al 1998 rimanevano però molto pochi gli esempi di metriche localmente conformi kähleriane, e quasi tutti erano in realtà metriche di Vaisman. Nel dicembre 1998 Paul Gauduchon e Liviu Ornea in [2] trovano le prime metriche localmente conformi kähleriane sulle superfici di Hopf diagonali $H_{\alpha,\beta}$ (superfici complesse rivestite da $\mathbf{C}^2 - 0$, il cui gruppo di trasformazioni di rivestimento è generato da $(z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1, \beta z_2)$, con α e β numeri complessi in modulo entrambi o maggiori o minori di 1), e tali metriche sono tutte di Vaisman.

In questa tesi viene costruita una famiglia di metriche localmente conformi kähleriane su $H_{\alpha,\beta}$ che comprende le suddette metriche, e nella quale esse sono caratterizzate dall'essere tutte e sole le metriche di Vaisman. La costruzione utilizza la parallelizzazione su S^3 data dalla struttura di gruppo di Lie. Siano e_2 ed e_3 i campi indotti dalla moltiplicazione quaternionale per i e j rispettivamente, e sia $J_{\alpha,\beta}$ la struttura complessa indotta su $S^1 \times S^3$ dal diffeomorfismo con $H_{\alpha,\beta}$. Poiché $\{e_2, J_{\alpha,\beta}(e_2), e_3, J_{\alpha,\beta}(e_3)\}$ sono linearmente indipendenti, una metrica hermitiana su $(S^1 \times S^3, J_{\alpha,\beta})$ può essere descritta tramite una matrice hermitiana 2×2. Siano ξ_1, ξ_2 le coordinate complesse su $S^3 \subset \mathbf{C}^2$, e sia $G = |\xi_1|^2 \log|\alpha| + |\xi_2|^2 \log|\beta|$:

Teorema **1 (teorema 1.2.4, nota 1.2.5 e teorema 1.2.7 della tesi)** *Per ogni $h : S^1 \to \mathbf{R}^+$ sia $g^h_{\alpha,\beta}$ la metrica hermitiana su $(S^1 \times S^3, J_{\alpha,\beta})$ data da*

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi h}{G^2} + \frac{|\xi_1|^2|\xi_2|^2 \log^2(|\alpha|/|\beta|)}{G^3} & \frac{\imath \xi_1 \xi_2 \log(|\alpha|/|\beta|)}{G^2} \\ \frac{\overline{\imath \xi_1 \xi_2} \log(|\alpha|/|\beta|)}{G^2} & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$$

Allora $g^h_{\alpha,\beta}$ è una metrica localmente conforme kähleriana su $(S^1 \times S^3, J_{\alpha,\beta})$, ed è una metrica di Vaisman se e solo se h è costante: in tal caso, essa descrive tutte le metriche di [2].

Come detto, le metriche $g^h_{\alpha,\beta}$ definiscono le forme di Lee $\omega^h_{\alpha,\beta}$. Il campo duale risulta indipendente dalla funzione h usata per definirlo, e determina dunque una distribuzione in rette complesse $\mathcal{E}_{\alpha,\beta} = \mathrm{span}\{(\omega^h_{\alpha,\beta})^\sharp, J_{\alpha,\beta}((\omega^h_{\alpha,\beta})^\sharp)\}$ su $H_{\alpha,\beta}$. Tale distribuzione è integrabile, e definisce quindi una proiezione $\Psi : H_{\alpha,\beta} \to \Delta$ sullo spazio topologico $\Delta = H_{\alpha,\beta}/\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$. Una superficie complessa si dice ellittica se si fibra su una curva algebrica non singolare con curve ellittiche come fibre generiche, e un risultato classico afferma che $H_{\alpha,\beta}$ è ellittica se e solo se esistono interi m ed n tali che $\alpha^m = \beta^n$.

In questa tesi si usa questo risultato per caratterizzare le superfici di Hopf ellittiche come tutte e sole quelle per cui le foglie di $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ sono tutte compatte (e quindi tori, in quanto ammettono un campo mai nullo). In tal caso, la fibrazione ellittica è proprio Ψ:

Teorema **2 (teoremi 1.3.6 e 1.4.1 della tesi)** *Le foglie di $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$ sono tutte compatte se e solo se esistono interi m ed n tali che $\alpha^m = \beta^n$. In tal caso Δ è omeomorfo a $\mathbf{CP}^1$ in maniera tale che la proiezione $\Psi : H_{\alpha,\beta} \to \mathbf{CP}^1$ è proprio la fibrazione ellittica.*

2. – Strutture hermitiane, iperhermitiane, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{Spin}(7)$ e $\mathbf{Spin}(9)$ su prodotti di sfere

Che le uniche sfere parallelizzabili siano quelle di dimensione 1, 3 e 7 è un fatto ben noto. La situazione è radicalmente diversa per quanto riguarda i prodotti di due o più sfere: tali prodotti sono infatti parallelizzabili se e solo se almeno una delle sfere ha dimensioni dispari (Michel Kervaire, 1956).

Parallelizzazioni esplicite sulle sfere parallelizzabili sono facilmente ottenibili utilizzando le strutture di algebre di divisione su $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}^8$. Per prodotti di due o più sfere l'unico risultato in tal senso noto all'autore si trova in [1], dove vengono date parallelizzazioni esplicite $\mathcal{B}$ nei casi in cui la dimensione dispari sia 1, 3, 5 o 7.

In questa tesi viene costruita una parallelizzazione esplicita $\mathcal{P}$ su *tutti* i prodotti di sfere parallelizzabili. Si consideri per semplicità il caso $S^m \times S^n$, n dispari. Siano $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ e $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ le coordinate di S^m e S^n rispettivamente, e sia $T = \sum_{j=1}^{n+1} t_j \partial_{y_j}$ il campo di lunghezza 1 dato dalla moltiplicazione complessa su $S^n \subset \mathbf{C}^{(n+1)/2}$. Siano

$$
\begin{aligned}
M_i &= \text{proiezione ortogonale di } \partial_{x_i} \text{ su } S^m \qquad i = 1, \ldots, m+1, \\
N_j &= \text{proiezione ortogonale di } \partial_{y_j} \text{ su } S^n \qquad j = 1, \ldots, n+1.
\end{aligned}
$$

Infine, siano M e N i campi normali di lunghezza 1 di $S^m \subset \mathbf{R}^{m+1}$ e $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ rispettivamente:

Teorema **3 (teorema 2.4.1 della tesi)** *I campi vettoriali $\{p_1, \ldots, p_{m+n}\}$ dati da*

$$
\begin{aligned}
p_i &= M_i + x_i T \qquad i = 1, \ldots, m-1, \\
p_{m-1+j} &= y_j M_m + t_j M_{m+1} + (t_j x_{m+1} + y_j x_m - t_j) T + N_j \qquad j = 1, \ldots, n+1,
\end{aligned}
$$

definiscono una parallelizzazione $\mathcal{P}$ ortonormale rispetto alla metrica prodotto su $S^m \times S^n$.

Dare una parallelizzazione su una varietà di dimensione n equivale a ridurre il gruppo di struttura del suo fibrato tangente a 1. Una parallelizzazione determina quindi una G-struttura per ogni gruppo G rappresentabile su $\mathbf{R}^n$ e, come mostra il seguente esempio, è possibile ottenere strutture radicalmente differenti tra loro agendo sulla parallelizzazione:

Esempio **1** *Siano e_3 e e_4 i campi vettoriali su S^3 dati dalla moltiplicazione quaternionale rispettivamente per j e k. Con le notazioni del teorema precedente, la parallelizzazione $\mathcal{B}$ data in [1] su $S^1 \times S^3$ è*

$$b_1 = M_1 + x_1 T, \qquad b_2 = M_2 + x_2 T, \qquad b_3 = e_3, \qquad b_4 = e_4.$$

Si associ a $\mathcal{B}$ la struttura quasi complessa $I_{\mathcal{B}}$ che manda b_1 in b_2 e b_3 in b_4. Detta τ la 1-forma su S^3 duale del campo T, risulta allora

$$d(b^1 + ib^2) = (b^1 + ib^2) \wedge \tau + 2i(x_1 + ix_2)(b^3 + ib^4) \wedge (b^3 - ib^4), d(b^3 + ib^4) = -2i(b^3 + ib^4) \wedge \tau$$

per cui $\mathcal{B}$ induce una struttura quasi complessa integrabile. Lo stesso procedimento associa invece alla parallelizzazione $\mathcal{B}' = \{b_1, b_3, b_2, b_4\}$ una struttura quasi complessa $I_{\mathcal{B}'}$ non integrabile, come si vede calcolando la torsione sui campi b_3 e b_4:

$$N(b_3, b_4) = 2(-x_2 b_1 + x_1 b_2 + 2x_3 b_3 + 2x_4 b_4) \neq 0.$$

In questa tesi vengono studiate G-strutture associate a $\mathcal{P}$ (e a $\mathcal{B}$ quando la dimensione dispari è 1 o 3) su prodotti di due sfere $S^m \times S^n$, e le loro orbite per l'azione del gruppo simmetrico S_{m+n} (nel caso di G-strutture associate a $\mathcal{B}$ e dimensione dispari 1 si descrive tutta l'orbita ortogonale). I gruppi G considerati sono

sfere	G	orbita	proprietà
$S^{2n-1} \times S^1$	U(n)	$\mathrm{O}(2n)I_{\mathcal{B}}$	Hopf hermitiane
$S^{4n-1} \times S^1$	Sp(n)	$\mathrm{O}(4n)H_{\mathcal{B}}$	Hopf iperhermitiane
$S^6 \times S^1$	G_2	$\mathrm{O}(7)\varphi_{\mathcal{B}}$	localmente conformi parallele
$S^7 \times S^1$	Spin(7)	$\mathrm{O}(8)\phi_{\mathcal{B}}$	localmente conformi parallele
$S^{15} \times S^1$	Spin(9)	$\mathrm{O}(15)\Phi_{\mathcal{B}}$	localmente conformi parallele
$S^m \times S^n_{m+n \equiv_2 0}$	$\mathrm{U}(\frac{m+n}{2})$	$S_{m+n}I_{\mathcal{P}}$	I integrabile se e solo se $I(p_{m-1+j}) = \pm p_{m+j}$
$S^m \times S^n_{m+n \equiv_4 0}$	$\mathrm{Sp}(\frac{m+n}{4})$	$S_{m+n}H_{\mathcal{P}}$	non integrabile
$S^m \times S^n_{m+n=7}$	G_2	$S_7\varphi_{\mathcal{P}}$	tipo generale
$S^m \times S^n_{m+n=8}$	Spin(7)	$S_8\phi_{\mathcal{P}}$	tipo generale

$G = \mathrm{U}((m+n)/2)$ quando entrambe le dimensioni sono dispari (strutture quasi hermitiane); $G = \mathrm{Sp}((m+n)/4)$ quando entrambe le dimensioni sono dispari e $m+n = 0 \bmod 4$ (strutture quasi iperhermitiane); $G = \mathrm{G}_2$, Spin(7) e Spin(9) nei casi in cui $m+n=7$, $m+n=8$ e $m+n=16$ rispettivamente. I risultati ottenuti (capitoli 3 e 4 della tesi) si sintetizzano nella tabella, tenendo presente che:

- per la terminologia *tipo generale* per quanto riguarda le strutture G_2 e Spin(7) si rimanda alla tesi, nel caso Spin(9) non c'è ancora una nozione analoga;
- le orbite di strutture associate a $\mathcal{B}$ (righe 1–5) determinano tutte un'unica classe di isomorfismo, e la struttura corrispondente è stata altrimenti definita;
- l'orbita di strutture quasi complesse associate a $\mathcal{P}$ (riga 6) si spezza in integrabili e non integrabili, e quelle integrabili sono tutte biolomorfe alla struttura hermitiana di Calabi-Eckmann;
- i casi restanti (righe 7–9) sono -a parer dell'autore- strutture originali su prodotti di sfere.

Riferimenti bibliografici

[1] Bruni M., *Sulla parallelizzazione esplicita dei prodotti di sfere*, Rend. di Mat., serie VII, **12**, (1992), 405–423.

[2] Gauduchon P. e Ornea L., *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces*, Ann. Inst. Fourier, **48**, (1998), 1107–1127.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, 56127 Pisa
e-mail: `parton@dm.unipi.it`
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Paolo Piccinni, Università di Roma "La Sapienza"