

Matematica generale: compito del 10 luglio 2013

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chieda al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x+3)^2 > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}\}, \quad C = (-4, -2)$$

- Dire, motivando le risposte, se $C \subseteq A$ e se $C \subseteq B$.
- Determinare $A \cup C$ e $B \cup C$.
- Determinare $A \cap C$ e $B \cap C$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1-x^2}{x-3} \leq 3.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^3 & \text{se } x < 0, \\ \ln(x) & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

determinarne

- il dominio;
 - il segno;
 - gli eventuali asintoti;
 - gli intervalli di crescita e decrescenza;
 - eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
 - gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
 - il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione $f(x) = (x-3)(2-x)$ in corrispondenza dell'intervallo $(0, 3)$.
5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$$

6. Si consideri la seguente serie con termine n -esimo dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{\alpha+1}{5}\right)^{n-2}.$$

- Determinare il carattere della serie per: $\alpha = 2$, $\alpha = -3$, $\alpha = 7$, $\alpha = -8$.
- Determinare per quali α la serie converge, per quali α la serie diverge, e per quali α la serie è indeterminata.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 294 & -1 \\ 0 & -437 & 1 \\ 0 & 698 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- dire, motivando la risposta, se A è invertibile;
- calcolare $A \cdot B$;
- calcolare il rango di A e il rango di B .