

## Matematica generale: esercitazione del 12 novembre 2012

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Siano dati i seguenti insiemi  $A, B, C, D, E, F, G, H$ .

$$A = \{-1, 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 5 - 3x \leq 2\}, \quad C = I(1, 3), \quad D = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 1 \leq n \leq 3\},$$

$$E = \{z \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } -1 \leq z < 3\}, \quad F = (-1, 1], \quad G = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } -x^2 - x + 2 > 0\},$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (e^{x-1} - e^2)(2 - 2x) = 0\}, \quad L = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |5 + 2x| \geq 1\}, \quad M = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \ln\left(\frac{3x}{3-2x}\right) \in \mathbb{R}\}.$$

- Descrivere  $A \times B, C \times D, G \times E, H \times F$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- Descrivere  $(A \times B) \cap (C \times D), (G \times E) \cap (H \times F)$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- Rispondere alle seguenti domande:  $C \subset L?$   $M \subset B?$
- Descrivere sulla retta reale  $\mathbb{R}$ :  $F \cup M, L \cap M, F \cap D, F \cup D, G \cup H, G \cap H$ .

2. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{-x^2 + 7x - 9}{-x^2 + 3x - 2} > 1.$$

3. Siano date le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{2}{e^{(\sqrt{x})^2} - 1}, \quad m(x) = \ln\left(\frac{x+4}{3-x}\right), \quad g(x) = \frac{4x}{3+2x} - 2, \quad h(x) = |3x+1|.$$

- Determinare campo di esistenza, immagine e inversa (se esiste) per  $f, g$  e  $h$ .
- Dire se esistono, e se esistono calcolare  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .
- Determinare il campo di esistenza di  $m$ .
- Determinare il campo di esistenza di  $m'$ .
- Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} m(x)$$

con  $x_0$  un punto a scelta che non è di accumulazione.

- Dire se  $h$  è continua, e se non lo è dire in quali punti non lo è e perché.
- Dire se  $h$  è derivabile, e se non lo è dire in quali punti non lo è e perché.

4. Per ciascuna delle seguenti serie dire se converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

5. Per ciascuna delle seguenti serie dire se converge. Se la serie converge calcolarne la somma.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 - 1}{n - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + 2^n}{7^{n+1}}.$$

6. Data  $a_n = \frac{3^{2n} + 4}{6^{n+1}}$ , calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$