

Matematica generale: compito dell'8 giugno 2012

Tutte le risposte vanno *motivate* : rispondere solo sì, no, o dare soltanto il risultato non basta.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente* .

1. Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 3 insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\ln(x^2 - 2x)}{\ln x} \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = I(2, 5), \quad C = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| \leq 1\}.$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se $B \subseteq A$ e se $C \subseteq B$.
(b) Determinare $A \cup B$ e $B \cup C$.
(c) Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 + x + 1}{2 - 4x} \leq 0.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-2} & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^x}{e^x - 1} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;
(b) il segno;
(c) gli eventuali asintoti;
(d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
(e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
(f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
(g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 3 e dall'asse delle x , in corrispondenza dell'intervallo $(\ln 2, 1)$.

5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} 3^n 8^{-n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2}{1+n}$$

convergono.

7. (solo 9 CFU) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dire se B è simmetrica. Inoltre, calcolare

- (a) il determinante della somma: $\det(A + B)$;
(b) il quadrato della somma: $(A + B)^2$.