

## Matematica generale: compito del 21 maggio 2012

Tutte le risposte vanno  *motivate* : rispondere solo sì, no, o dare soltanto il risultato non basta.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti  *perfettamente*  prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato  *insufficiente* .

1. Denotando con  $I(x_0, r)$  l'intorno sulla retta reale di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  e raggio  $r \geq 0$ , si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < |x + 1|\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 2(x + 1) - 3(x - 1) > (x + 1)^2 - x(x + 2) + 6\}, \quad C = I(-1, 4).$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se  $A \subseteq B$  e se  $C \subseteq A$ .  
(b) Determinare  $A \cup B$  e  $B \cup C$ .  
(c) Determinare  $A \cap B$  e  $B \cap C$ .

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{2x^2 - 6x - 14}{x^2 - x} \leq 1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{se } x \leq 1, \\ -x^2 e^x & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;  
(b) il segno;  
(c) gli eventuali asintoti;  
(d) gli intervalli di crescita e decrescenza;  
(e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;  
(f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;  
(g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x)$  dell'esercizio 3 e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(-1, 2)$ .

5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{1 - 3x}{\sqrt{x}} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} 4^{2n} 4^{-2n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$$

convergono.

7. (solo 9 CFU) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare

- (a) la trasposta della differenza:  $(B - A)^t$ ;  
(b) il determinante della differenza:  $\det(B - A)$ ;  
(c) il quadrato di  $A$ :  $A^2$ .