

Matematica generale: esercizi sulla barriera, 16 maggio 2012

Di seguito, vengono dati 27 insiemi, etichettati con $A_1, \dots, A_9, B_1, \dots, B_9, C_1, \dots, C_9$. Si ricorda che la notazione $I(x_0, r)$ indica l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$.

1. $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 2 < |x + 1|\}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : |2(x + 1) - 3(x - 1)| > (x + 1)^2 - x(x + 2) + 6\}$, $C_1 = I(-1, 4)$.
2. $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > |x - 3| + |x|\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < -1\}$, $C_2 = I(1, 4)$.
3. $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| + |x - 1| = 100\}$, $B_3 = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| > 2\}$, $C_3 = I(-50, 4)$.
4. $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 5| > x - 2\}$, $B_4 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - |x + 3| + 1 > 0\}$, $C_4 = I(4, 1)$.
5. $A_5 = \{x \in \mathbb{R} : |(x + 1)^2 - x(x + 4)| > 3(x + 1) - 2\}$, $B_5 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 5\}$, $C_5 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\}$.
6. $A_6 = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > x - 3\}$, $B_6 = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 > x - 2\}$, $C_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\}$.
7. $A_7 = \{x \in \mathbb{R} : |3 - x| + |x| \geq 2x - 1\}$, $B_7 = \{x \in \mathbb{R} : |-x - 1| < 5\}$, $C_7 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[15]{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\}$.
8. $A_8 = \{x \in \mathbb{R} : |x^{1027} - 5x^{\sqrt{\pi}} + 151| \leq -17\}$, $B_8 = \{x \in \mathbb{R} : |4 - x| \leq 8\}$, $C_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[18]{x^2 - 1} \in \mathbb{R}\}$.
9. $A_9 = \{x \in \mathbb{R} : |x^{1028} + 5x^2 + 151| \geq -17\}$, $B_9 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = 0\}$, $C_9 = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2 - 1) \in \mathbb{R}\}$.

Presi 2 qualunque di questi insiemi, determinarne l'unione e l'intersezione, e dire se uno è contenuto nell'altro.

Esempio giusto.

Prendiamo gli insiemi B_3 e C_2 . Abbiamo:

$$\begin{aligned} B_3 &= \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| > 2\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x < -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} \\ &= (-\infty, -1/2) \cup (3/2, +\infty), \\ C_2 &= I(1, 4) = (1 - 4, 1 + 4) = (-3, 5). \end{aligned}$$

Quindi:

- $B_3 \not\subseteq C_2$ (perché $6 \in B_3$, ma $6 \notin C_2$).
- $C_2 \not\subseteq B_3$ (perché $0 \in C_2$, ma $0 \notin B_3$).
- $B_3 \cup C_2 = (-\infty, +\infty)$.
- $B_3 \cap C_2 = (-3, -1/2) \cup (3/2, 5)$.

Esempio sbagliato. Trovare l'errore.

Prendiamo gli insiemi B_3 e C_4 . Abbiamo:

$$\begin{aligned} B_3 &= \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| > 2\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 2x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2x < -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 3/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} \\ &= (-\infty, -1/2) \cup (3/2, +\infty), \\ C_4 &= I(4, 1) = (4 - 1, 4 + 1) = (3, 5). \end{aligned}$$

Quindi:

- $B_3 \not\subseteq C_4$ (perché $6 \in B_3$, ma $6 \notin C_4$).
- $C_4 \subseteq B_3$ (perché $4 \in C_4$, e anche $4 \in B_3$).
- $B_3 \cup C_4 = B_3$.
- $B_3 \cap C_4 = C_4$.