

Precorso CLEF-CLEI, test finale
7 ottobre 2003

Avete a disposizione 2 ore (inizio ore 12, consegna ore 14). Suggestisco di non fare brutta e bella copia, porterebbe via troppo tempo. Scrivete il numero dell'esercizio e accanto lo svolgimento, con tutti i commenti che ritenete opportuni.

Gli esercizi sono 18, dunque potete concedervi circa 7 minuti per esercizio. Trascorso questo tempo, passate al successivo.

Buon lavoro!

ARITMETICA

1. Scomporre in fattori primi 3500 e 6600.
2. Calcolare il massimo comun divisore (MCD) e il minimo comune multiplo (mcm) tra $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$ e $2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.
3. Calcolare il massimo comun divisore (MCD) tra 10007 e 10004 SENZA scomporre in fattori primi.
4. A cosa è congruo 23 modulo 4?
5. Esprimere come potenza a esponente in \mathbb{Q} il numero $\sqrt[5]{7^2}$.

CALCOLO LETTERALE

6. L'identità $(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 3) = a - 9$ è vera per qualunque $a \in \mathbb{R}$?
7. Sviluppare $(2x - y)^4$ con Tartaglia.
8. Siano $p(x) = 2x^4 - x^3 + 7x + 1$, $q(x) = x - 3$. Dire se $q(x) | p(x)$ (il simbolo $|$ si legge "divide").
9. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare il resto di $p(x)$ nella divisione per $q(x)$ SENZA eseguire la divisione.

10. Con riferimento agli esercizi precedenti, eseguire la divisione con resto di $p(x)$ per $q(x)$ (usare Ruffini o divisione con resto, a piacere).
11. Scrivere un'equazione le cui soluzioni siano esattamente $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -4$.
12. Risolvere $\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} + 1 = 0$.
13. Risolvere $|x - 1| + |x + 2| = 3$.
14. Risolvere

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

TEORIA DEGLI INSIEMI E FUNZIONI

15. Sia $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow (-\infty, 1]$, $f(x) = 1 - x^2$. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biunivoca. Calcolare l'inversa f^{-1} .
16. Studiare il segno di $e^{x^2-7}(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3)$.

GEOMETRIA ANALITICA

17. Disegnare il grafico della funzione data implicitamente dall'equazione $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
18. Discutere graficamente l'equazione $e^x + x^2 - 3 = 0$.

Facoltativo¹: dimostrare che $\log_2 5$ non è razionale (dimostrare per assurdo utilizzando la parte dell'unicità nel teorema fondamentale dell'aritmetica).

¹Fatelo solo se avete finito tutti gli altri esercizi, oppure se non ci sono più altri esercizi che sapete fare.