## Precorso CLEF-CLEI, esercizi di preparazione al test finale con soluzioni

### ARITMETICA

1. Scomporre in fattori primi 2500 e 5600.

   **Soluzione:** Osserviamo che entrambi i numeri sono multipli di $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Dunque basta scomporre in fattori i numeri 25 e 56. Si ottiene

$$2500 = 25 \cdot 100 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^2 \cdot 5^4$$
$$5600 = 56 \cdot 100 = 7 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$$

2. Calcolare il massimo comun divisore (MCD) e il minimo comune multiplo (mcm) tra $2^2 \cdot 5^4$ e $2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

   **Soluzione:** I numeri sono già scomposti in fattori. Dobbiamo solo pensare: "MCD=il più grande dei divisori comuni... visto che i divisori di un numero sono dati da tutti i possibili prodotti dei suoi fattori primi, dobbiamo prendere i fattori che sono in comune, quindi MCD$= 2^2 \cdot 5^2$". Un ragionamento analogo sul mcm ci dà mcm$= 2^5 \cdot 5^4 \cdot 7$.

3. Calcolare il massimo comun divisore (MCD) tra 10008 e 10005 SENZA scomporre in fattori primi.

   **Soluzione:** Sia $d = \mathrm{MCD}(10008, 10005)$. Allora $d|(10008 - 10005) = 3$, cioè $d$ è un divisore di 3. Ma i divisori di 3 sono solo 1 e 3, e poiché 10008 e 10005 sono divisibili per 3 (si vede usando il criterio di divisibilità per 3) ne segue che $d = 3$.

4. Eseguire la divisione con resto di 24 per 5, ed esprimere con un'uguaglianza il significato di tale operazione.

   **Soluzione:** 24 diviso 5 uguale 4 con resto 3: $24 = 4 \cdot 5 + 3$.

5. A cosa è congruo 24 modulo 5?

   **Soluzione:** Bisogna dividere 24 per 5, e la risposta cercata è il resto di tale divisione. Usando l'esercizio precedente otteniamo $24 \equiv 4 \mod 5$.

6. Esprimere come potenza a esponente in $\mathbb{Q}$ il numero $\sqrt[7]{7^3}$.

   **Soluzione:** L'indice della radice diventa il denominatore dell'esponente: $\sqrt[7]{7^3} = 7^{\frac{3}{7}}$.

7. Scrivere $2^3 + 2^2 + 2$ come numero binario (in base 2).

   **Soluzione:** $2^3 + 2^2 + 2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (1110)_2$ usando direttamente la definizione di base numerica.

### CALCOLO LETTERALE

8. Calcolare $(\sqrt{2a}+5\sqrt{a})^2$.

   **Soluzione:** Prima di tutto osserviamo che l'espressione ha senso solo se $a \geq 0$. Detto questo, usando il prodotto notevole $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ otteniamo $(\sqrt{2a}+5\sqrt{a})^2 = 2a+10\sqrt{2a}\sqrt{a}+25a = 27a+10\sqrt{2a^2} = 27a+10a\sqrt{2} = (27+10\sqrt{2})a$. Notare che nella penultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $a \geq 0$, e dunque $\sqrt{a^2} = a$ (invece di $\sqrt{a^2} = |a|$).

9. L'identità $(\sqrt{2a}+5\sqrt{a})^2 = (27+10\sqrt{2})a$ è vera per qualunque $a \in \mathbb{R}$?

   **Soluzione:** No! Se $a < 0$ il primo membro perde di significato. L'uguaglianza è vera solo se $a \in \mathbb{R}^+$ (vedi anche esercizio precedente).

10. Sviluppare $(x-2y)^4$ con Tartaglia.

    **Soluzione:** Prima di tutto posizioniamo le variabili al loro posto, con le potenze nel giusto ordine:
    $$(x-2y)^4 = \square x^4 + \square x^3(-2y) + \square x^2(-2y)^2 + \square x(-2y)^3 + \square(-2y)^4.$$
    Ora dobbiamo solo inserire i giusti coefficienti nei quadratini, e per questo ci viene in aiuto il triangolo di Tartaglia, che ci dà 1, 4, 6, 4, 1. Svolgendo i conti otteniamo:
    $$(x-2y)^4 = x^4+4x^3(-2y)+6x^2(-2y)^2+4x(-2y)^3+(-2y)^4 = x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4.$$

11. Siano $p(x) = 2x^5 - x^3 + 7x + 1$, $q(x) = x - 3$. Dire se $q(x)|p(x)$ (il simbolo | si legge “divide”).

    **Soluzione:** Essendo $q(x)$ di primo grado, basta vedere se la soluzione di $q(x) = 0$ risolve anche $p(x) = 0$. La soluzione di $q(x) = 0$ è 3, e $p(3) = 2 \cdot 3^5 - 3^3 + 7 \cdot 3 + 1 = 481 \neq 0$, quindi $q(x) \nmid p(x)$.

12. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare il resto di $p(x)$ nella divisione per $q(x)$ SENZA eseguire la divisione.

    **Soluzione:** Il teorema del resto ci dà la risposta: resto$= p(3) = 481$ (vedi esercizio precedente).

13. Con riferimento agli esercizi precedenti, eseguire la divisione con resto di $p(x)$ per $q(x)$ (usare Ruffini o divisione con resto, a piacere).

    **Soluzione:** L'algoritmo della divisione con resto, o Ruffini se si preferisce, ci danno:
    $$p(x) = (2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 160)q(x) + 481$$

14. Risolvere $4x - 3 = 1$.

    **Soluzione:** $4x = 1 + 3 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

15. Risolvere $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

    **Soluzione:** Poiché $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 < 0$, l'equazione non ha soluzioni reali.

16. Risolvere $(x^3 - 1)(x + 4) = 0$.

    **Soluzione:** Il prodotto di più numeri dà zero solo quando uno di loro è zero (principio di annullamento del prodotto), dunque dobbiamo risolvere separatamente $x^3 - 1 = 0$ e $x + 4 = 0$. La prima è equivalente a $x^3 = 1$, e poiché soltanto 1 elevato al cubo dà 1, abbiamo una prima soluzione $x_1 = 1$. L'altra equazione ci dà $x_2 = -4$.

17. Risolvere $x^4 + 4x^3 - x - 4 = 0$.

    **Soluzione:** Applichiamo il teorema di Ruffini sulle radici razionali di un polinomio. Il valore 1 risolve l'equazione, e la divisione per $x-1$ ci dà $x^4+4x^3-x-4 = (x^3+5x^2+5x+4)(x-1)$. Ancora, il valore $-4$ risulta essere una radice di $x^3+5x^2+5x+4$, e la divisione ci dà $x^3+5x^2+5x+4 = (x^2 + x + 1)(x + 4)$. Osserviamo infine che $x^2 + x + 1 = 0$ non ha soluzioni (delta negativo, oppure si può osservare che è un polinomio ciclotomico di grado pari, dunque irriducibile) per concludere che l'equazione iniziale ammette solo le due soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$.

18. Scrivere un'equazione di grado 4 le cui soluzioni siano esattamente $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

    **Soluzione:** Il polinomio $(x - x_1)(x - x_2)$ si annulla per $x = x_1, x_2$, ma è di secondo grado. Per avere un polinomio di quarto grado dobbiamo moltiplicare per un polinomio di secondo grado che non si annulla mai, per esempio $x^2 + 1$. Dunque una risposta (non unica) è

    $$(x^2 + 1)(x - 1)(x + 4) = 0$$

19. Risolvere $\dfrac{x^2 - x}{x + 1} + 1 = \dfrac{2}{x + 1}$.

    **Soluzione:** Prima di tutto scriviamo la condizione $x + 1 \neq 0$, cioè $x \neq -1$. Poi facciamo il minimo comun denominatore (il mcm dei denominatori) che in questo caso è $x+1$, e trasformiamo l'equazione fratta in un'equazione intera:

    $$\frac{x^2 - x}{x + 1} + 1 = \frac{2}{x + 1} \Rightarrow \frac{x^2 - x + x + 1 - 2}{x + 1} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

    Concludiamo dicendo che $x = -1$ NON è accettabile, dunque l'equazione ha un'unica soluzione $x = 1$.

20. Risolvere $e^{x^3-1} - 1 = 0$.

    **Soluzione:** È un'equazione esponenziale pura. Si risolve portando a secondo membro il termine noto, e applicando a ambo i membri la funzione ln:

    $$e^{x^3-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x^3-1} = 1 \Rightarrow \ln(e^{x^3-1}) = \ln(1) \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

21. Risolvere $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x$.

    **Soluzione:** È un'equazione irrazionale, con un solo radicale. Si risolve isolando la radice (in questo caso la radice è già isolata) e applicando a ambo i membri la funzione elevazione al quadrato. Poiché la funzione elevazione al quadrato $f(x) = x^2$ non è iniettiva, rischiamo di introdurre delle soluzioni. Bisogna pertanto ricordarsi di fare la verifica alla fine:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Poiché $\sqrt{(-1/2)^2 + 2(-1/2) + 1} \neq -1/2$, questa soluzione NON è accettabile, quindi l'equazione di partenza non ha soluzioni reali.

22. Risolvere $|x - 2| + |x + 1| = 4$.

    **Soluzione:** È un'equazione con valore assoluto, e si risolve con lo studio del segno degli argomenti dei moduli. Poiché $x - 2 \geq 0$ in $[2, +\infty)$ e $x + 1 \geq 0$ in $[-1, +\infty)$, otteniamo la suddivisione di $\mathbb{R}$ in tre intervalli: $I_1 = (-\infty, -1)$ (entrambi negativi), $I_2 = [-1, 2)$ ($x + 1$ positivo, $x - 2$ negativo) e $I_3 = [2, +\infty)$ (entrambi positivi). Quindi otteniamo i tre sistemi

$$\begin{cases} -(x-2) - (x+1) = 4 \\ x \in I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -(x-2) + (x+1) = 4 \\ x \in I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2) + (x+1) = 4 \\ x \in I_3 \end{cases}$$

    che ci danno

$$\begin{cases} -2x = 3 \\ x \in I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 1 \\ x \in I_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 5 \\ x \in I_3 \end{cases}$$

    Il primo di questi sistemi ci dà $x = -3/2$ (accettabile, perchè sta in $I_1$), il secondo non ha soluzioni, il terzo ci dà $x = 5/2$ (accettabile, perchè sta in $I_3$).

23. Risolvere

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

    **Soluzione:** Procediamo per sostituzione:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 + y) + y = 2 \\ x = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

## TEORIA DEGLI INSIEMI E FUNZIONI

24. Siano $A = (-1, 1]$, $B = [0, 3)$, $C = \{1/2, 4\}$. Calcolare $(A \cap B) \cup C$ e $(A \cap C) \cup B$.

    **Soluzione:** $(A \cap B) \cup C = [0, 1] \cup \{1/2, 4\} = [0, 1] \cup \{4\}$, $(A \cap C) \cup B = \{1/2\} \cup [0, 3) = [0, 3)$.

25. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^2$. Dire se $f$ è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

    **Soluzione:** Sappiamo che il grafico di questa funzione è una parabola, concavità verso il basso e due intersezioni con l'asse $x$ in $\pm\sqrt{2}$: graficamente l'iniettività corrisponde al fatto che nessuna retta orizzontale intersechi il grafico in più punti, e la suriettività al fatto che tutte le rette orizzontali intersechino il grafico in almeno un punto, e poiché è chiaro che la retta $y = 0$ interseca la curva in due punti e la retta $y = 3$ in nessuno, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - x^2$ non è ne iniettiva ne suriettiva (biunivoca=iniettiva+suriettiva, quindi $f$ non è neanche biunivoca).

26. Sia $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 2], f(x) = 2 - x^2$. Dire se $f$ è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
**Soluzione:** In questo caso la retta $y = 3$ non funziona (il codominio è $(-\infty, 2]$, dunque $y$ non può essere maggiore di 2) e non c'è nessuna retta orizzontale $y = y_0$, con $y_0 \in (-\infty, 2]$ che non intersechi il grafico, dunque $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 2], f(x) = 2 - x^2$ è suriettiva. Non è invece iniettiva per lo stesso motivo dell'esercizio precedente (la retta $y = 0$ interseca il grafico in due punti). Pertanto non è nemmeno biunivoca.

27. Sia $f\colon \mathbb{R}^+ \to (-\infty, 2], f(x) = 2 - x^2$. Dire se $f$ è iniettiva, suriettiva, biunivoca. Calcolare l'inversa $f^{-1}$.
**Soluzione:** Risposta psicologica: visto che l'esercizio chiede di calcolare l'inversa, e l'inversa esiste solo se $f$ è biunivoca, allora $f$ è biunivoca. L'inversa si trova esplicitando $x$ in funzione di $y$:
$$y = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 - y \Rightarrow x = \sqrt{2 - y}$$
Notare che nell'ultima uguaglianza si sceglie $\sqrt{2-y}$ e non $-\sqrt{2-y}$ perché il dominio è $\mathbb{R}^+$, e dunque $x$ è positivo o nullo.

Per non usare l'argomento psicologico, la biunivocità si argomenta come negli esercizi precedenti, tenendo presente che il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \to (-\infty, 2], f(x) = 2 - x^2$ è dato dal solo ramo discendente della parabola, e le rette da considerare per l'iniettività e la suriettività sono semirette ($x \in \mathbb{R}^+$, cioè $x \geq 0$).

28. Studiare il segno di $e^{x^{1234} - 75634}(x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x)$.
**Soluzione:** Il fattore $e^{x^{1234} - 75634}$ è chiaramente messo solo per spaventare. In realtà, essendo la funzione esponenziale sempre positiva (ricordate il grafico di $y = e^x$!) questo fattore è sempre positivo, e non conta nulla nello studio del segno. Rimane da studiare il fattore $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x$. Un raccoglimento della $x$ ci dà $x(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3)$, e il teorema di Ruffini sulle radici razionali di un polinomio ci dà $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$. Poiché $x^2 + 1$ è sempre positivo, il segno si riduce ai segni di $x$, $x + 3$, $x - 1$. Il segno richiesto risulta positivo per $x \in (-3, 0) \cup (1, +\infty)$, negativo per $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1)$, nullo per $x \in \{-3, 0, 1\}$.

## GEOMETRIA ANALITICA

29. Rappresentare $P = (0, 1)$ e $Q = (3, 5)$ sul piano cartesiano e calcolare la distanza $PQ$.
**Soluzione:** Formula della distanza tra due punti: $PQ = \sqrt{3^2 + (5 - 1)^2} = 5$.

30. Calcolare il punto medio tra i punti $P$ e $Q$ dell'esercizio precedente.

    **Soluzione:** $(3/2, 3)$.

31. Disegnare qualitativamente il grafico di $y = -2x + 3$.

    **Soluzione:** Sappiamo che una funzione polinomiale di primo grado ha come grafico una retta. Dunque basta trovare due punti, sostituendo per esempio $x = 0$ e $x = 1$ nell'equazione. Si ottengono i punti $(0, 3)$ e $(1, 1)$.

32. Disegnare qualitativamente il grafico di $y = x^2 + 2x + 1$.

    **Soluzione:** Sappiamo che una funzione polinomiale di secondo grado ha come grafico una parabola. La concavità è verso l'alto (il coefficiente di $x^2$ è positivo), e c'è una sola intersezione con l'asse $x$ in $(-1, 0)$.

33. Disegnare il grafico della funzione data implicitamente dall'equazione $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$.

    **Soluzione:** È una circonferenza di centro $(1, 2)$ e raggio $\sqrt{3}$.

34. Discutere graficamente l'equazione $e^x + x - 4 = 0$

    **Soluzione:** L'equazione è equivalente a $e^x = 4 - x$. Disegnamo i grafici di $y = e^x$ e $y = 4 - x$. Si intersecano obbligatoriamente in un solo punto, con ascissa positiva. Dunque esiste un'unica soluzione $x_1$ dell'equazione data, e risulta $x_1 > 0$. Un'analisi più accurata (sostituendo 1 e 2 nelle due funzioni, e ricordando che $e \cong 2,7$) ci dà $x_1 \in (1, 2)$.

35. Dimostrare che $\log_3 11$ non è razionale (dimostrare per assurdo utilizzando la parte dell'unicità nel teorema fondamentale dell'aritmetica).

    **Soluzione:** Supponiamo $\log_3 11 = p/q$. Allora $11 = 3^{p/q}$, e quindi $11^q = 3^p$. Ma questo è impossibile, perché vorrebbe dire avere due scomposizioni differenti dello stesso numero, mentre il teorema fondamentale dell'aritmetica dice che la scomposizione in fattori primi è unica.