Correzione del test d'ingresso CLEF-CLEI proposto l'11 settembre 2003

Sotto alle domande trovate le risposte corrette e, in testo *enfatizzato*, alcune considerazioni sulla valutazione del singolo quesito. Dove non specificato, i quesiti sono stati valutati pienamente solo se sono state date tutte le risposte corrette.

ARITMETICA

1. Eseguire la divisione con resto di 237 per 43, ed esprimere con un'uguaglianza il significato di tale operazione.
   Risposta: $237 = 43 \cdot 5 + 22$.

2. Spiegare cos'è un numero primo e dare alcuni esempi.
   Risposta: è un numero intero DIVERSO DA 1 divisibile solo per se stesso e per 1. Esempi: 2, 3, 5, 7.
   Accettata anche la risposta senza "intero DIVERSO DA 1".

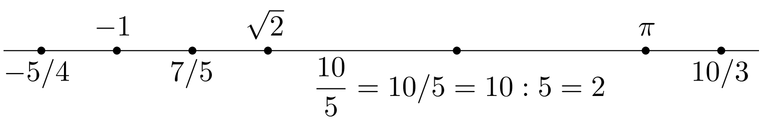
3. Scomporre 165 in numeri primi.
   Risposta: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$.

4. Dire, senza eseguire operazioni, se $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ è divisibile per 13. Perché?
   Risposta: no, perché un numero si divide per un primo p (nel nostro caso 13) solo se p compare nella sua scomposizione in numeri primi.

5. Calcolare il massimo comun divisore (MCD) e il minimo comune multiplo (mcm) tra $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$ e $2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 19$.
   Risposta: MCD$= 3 \cdot 11$, mcm$= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$.

6. Calcolare $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$
   Risposta: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ e $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

7. Ordinare su una retta i seguenti numeri: $\frac{10}{5}, 10/5, 10:5, 2, -1, -5/4, 7/5, \sqrt{2}, 10/3, \pi$.
   Risposta:



8. Dire a parole cosa sono i numeri reali, algebrici, razionali, interi, naturali.
   Risposta: reali$= \mathbb{R}$ =tutti i numeri[1], algebrici$= \mathbb{A}$ =soluzioni di polinomi a coefficienti interi, razionali$= \mathbb{Q} = \{p/q, \text{con } p, q \text{ interi}\}$, interi$= \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, naturali$= \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
   Accettato se si è fatto capire di avere idea di cosa sono almeno $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

9. "Da $4 > 2$ segue, moltiplicando ambo i membri per -1, $-4 > -2$". Giusto o sbagliato? Perché?
   Risposta: sbagliato, perché la moltiplicazione per numeri negativi cambia il verso delle disuguaglianze.

10. Calcolare, senza svolgere le potenze, $3^{45} \cdot 3^5$.
    Risposta: 3^{50}.

[1] Il quesito non chiedeva una definizione rigorosa degli insiemi numerici, ma una descrizione "a parole".

11. Calcolare il logaritmo in base 2 di 2^8.

    Risposta: 8.

12. Cosa significa: "il logaritmo trasforma i prodotti in somme"?

    Risposta: descrive a parole la regola $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$.

13. Scrivere $2^4 + 2^2$ in base 2.

    Risposta: 10100.

    Accettata anche la risposta $10000 + 100$.

ALGEBRA, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

14. Sia A uguale a $\dfrac{p^2 - q^2}{p+q}$. Calcolare il valore di A quando p vale 2 e q vale 1.

    Risposta: 1.

15. Sia $A = \dfrac{p^2 - q^2}{p+q}$. Calcolare il valore di A quando $p = 2$ e $q = 1$.

    Risposta: 1.

16. Sia $A(p, q) = \dfrac{p^2 - q^2}{p+q}$. Calcolare $A(2, 1)$.

    Risposta: 1.

17. Scomporre $p(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ in fattori, e dire se $p(x)$ è divisibile per $x - 1$.

    Risposta: $p(x) = 3x(x-1)(x-2)$, quindi è divisibile per $x - 1$.

18. Nell'esercizio precedente, è possibile dire se $p(x)$ è divisibile per $x - 1$ senza prima scomporre in fattori?

    Risposta: si, calcolando $p(1)$ (teorema del resto).

    Accettato anche Ruffini.

19. Cosa si intende con "radice di un polinomio"?

    Risposta: le soluzioni di $p(x) = 0$, cioé quei numeri che sostituiti nel polinomio danno 0.

20. Eseguire la divisione con resto di $p(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ per $x - 3$, ed esprimere con un'uguaglianza il significato di tale operazione. È possibile determinare il resto di tale divisione senza doverla eseguire?

    Risposta: $p(x) = (3x^2 + 6)(x - 3) + 18$. Il resto è dato da $p(3)$ (teorema del resto).

    Valutato come 2 esercizi differenti: divisione con resto, applicazione del teorema del resto.

21. Un polinomio della forma $3x^{127} + \cdots + 1$ può avere come radice $\dfrac{1}{2}$? Perché?

    Risposta: no, perché le radici RAZIONALI di un polinomio a coefficienti interi sono tutte della forma p/q, con p divisore del termine noto e q divisore del coefficiente del termine di grado massimo del polinomio (teorema di Ruffini). Quindi le radici razionali di $3x^{127} + \cdots + 1$ possono essere solo $\pm 1, \pm 1/3$.

22. Scomporre in fattori $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$.

    Risposta: $(x-2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

23. Risolvere (a) $3x + 6 = 0$, (b) $2x + 1 = 0$, (c) $(3x+6)(2x+1) = 0$, (d) $6x^2 + 15x + 6 = 0$, (e) $x^3 - 1 = 0$, (f) $x^4 - 1 = 0$, (g) $4^{3x} - 2 = 0$, (h) $\ln(2x - 1) = 0$, (i) $\sqrt{2x+3} = x$, (j) $|2x + 3| = 1$.

    Risposta: (a) $x = -2$, (b) $x = -1/2$, (c) $x = -2$ e $x = -1/2$, (d) $x = -2$ e $x = -1/2$, (e) $x = 1$, (f) $x = \pm 1$,

(g) $x = 1/6$, (h) $x = 1$, (i) $x = -1$ e $x = 3$, (j) $x = -1$ e $x = -2$.

Valutato come 8 esercizi differenti: (a)+(b) (eqs di primo grado), (c) (regola di annullamento del prodotto), (d) (eqs di secondo grado), (e)+(f) (eqs di grado superiore al secondo), (g) (eqs esponenziali), (h) (eqs logaritmiche), (i) (eqs irrazionali), (j) (eqs con valore assoluto). L'esercizio (c) è accettato solo se si è applicata la legge di annullamento del prodotto, mentre l'esercizio (i) è accettato solo se si è fatta la verifica delle soluzioni.

24. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Risposta: $(x, y) = (0, 1)$.

25. Spiegare la differenza tra "studiare il segno" e "risolvere una disequazione".

Risposta: studiare il segno di una funzione $f(x)$ significa determinare per quali valori di x la funzione è positiva, negativa o nulla, mentre risolvere una disequazione $f(x) \lesseqgtr 0$ significa trovare i valori di x che la verificano. Dunque lo studio del segno di $f(x)$ equivale a risolvere due disequazioni ($f(x) > 0$ e $f(x) < 0$) e un'equazione ($f(x) = 0$). Notare però che spesso l'unico modo per risolvere una disequazione è lo studio del segno.

26. Risolvere la disequazione $x^2 + 2x - 3 > 0$. Studiare il segno di $x^2 + 2x - 3$.

Risposta: $x^2 + 2x - 3$ è positivo per $x < -3$ e $x > 1$, negativo per $-3 < x < 1$ e nullo per $x = 1$ e $x = -3$.

27. Studiare il segno di $\dfrac{x+3}{x-1}$

Risposta: $\dfrac{x+3}{x-1}$ è positivo per $x < -3$ e $x > 1$, negativo per $-3 < x < 1$, nullo per $x = -3$ e non definito per $x = 1$.

INSIEMI E LOGICA

28. Quanti elementi contiene l'insieme vuoto?

Risposta: 0.

29. Dati $A = [1, 3)$ e $B = (2, 4]$ si calcoli: (a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $A - B$; (d) $B - A$.

Risposta: $A \cup B = [1, 4]$, $A \cap B = (2, 3)$, $A - B = [1, 2]$, $B - A = [3, 4]$.

Accettato se si è fatto (a)+(b).

30. Dare un esempio di applicazione iniettiva tra numeri interi.

Risposta:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

.

Accettata un'applicazione iniettiva tra insiemi qualunque.

31. Dare un esempio di applicazione suriettiva tra numeri interi.

Risposta:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & [n/2] \end{array}$$

.

Accettata un'applicazione suriettiva tra insiemi qualunque.

32. Dare un esempio di applicazione biunivoca tra numeri interi.

    Risposta:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

.

Accettata un'applicazione biunivoca tra insiemi qualunque.

33. Scrivere la negazione della seguente frase: "tutti i gatti sono bianchi".

    Risposta: "esiste almeno un gatto che non è bianco".

    Accettata anche: "non tutti i gatti sono bianchi".

34. Dalla verità della proposizione: "quando piove la strada si bagna" possiamo dedurne la verità della proposizione: "quando non piove la strada non si bagna"? Qual è la proposizione contronominale corretta?

    Risposta: no. Possiamo dedurne: "se la strada non si bagna, allora non piove".

    Accettata una qualunque argomentazione "sensata" che spieghi perché la deduzione è errata, anche senza la contronominale corretta.

35. Dimostrare che ogni numero pari è somma di due numeri dispari.

    Risposta: sia n pari. Allora $n = 2k = (2k-1)+1$, con $2k-1$ e 1 numeri dispari.

GEOMETRIA

36. Calcolare la distanza del punto $(3, 4)$ dall'origine $(0, 0)$.

    Risposta: 5.

37. Scrivere l'equazione del luogo di punti la cui distanza dall'origine $(0, 0)$ è 5.

    Risposta: $x^2 + y^2 = 25$.

38. Perché il coefficiente angolare di una retta è detto anche "pendenza della retta"?

    Risposta: perché il coefficiente angolare la tangente dell'angolo formato dalla retta con l'asse x.

    Accettata la risposta "perché determina l'inclinazione della retta".

39. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(1, 0)$ e avente coefficiente angolare 2.

    Risposta: $y = 2(x-1)$.

40. Che tipo di curve si possono ottenere intersecando un cono infinito con un piano?

    Risposta: coniche.

    Accettato l'elenco delle coniche: ellisse, iperbole, parabola.

SUCCESSIONI E FUNZIONI

41. Calcolare $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$.

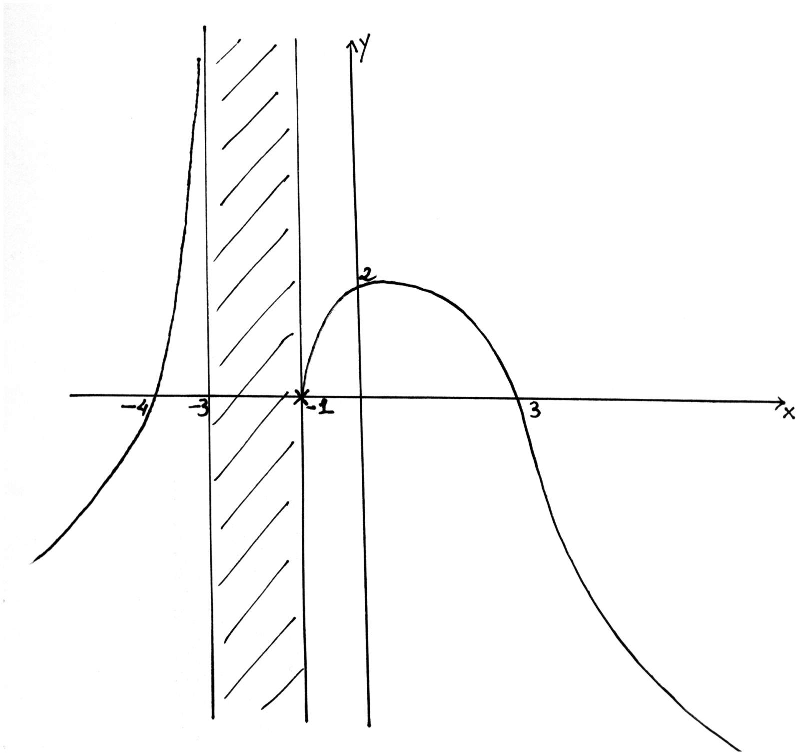
    Risposta: $(10+1) \cdot 5 = 55$.

    Accettato anche solo il risultato.

42. Calcolare $\sum_{n=1}^{10} n$.
Risposta: $(10+1)\cdot 5 = 55$.
Accettato anche solo il risultato.

43. Sia a_n la successione numerica data da $a_n = n$. Calcolare $\sum_{n=1}^{10} a_n$.
Risposta: $(10+1)\cdot 5 = 55$.
Accettato anche solo il risultato.

44. Esaminando il seguente grafico di funzione, rispondere alle domande:



(a) Qual è il dominio della funzione?

(b) Qual è il segno della funzione?

(c) Quali sono le intersezioni con gli assi?

(d) Quali sono i limiti della funzione in $-\infty, -3^-, -1^+, +\infty$?

(e) Qual è il segno della derivata prima della funzione?

(f) Quali sono i suoi punti e valori critici?

(g) Qual è il segno della derivata seconda della funzione?

Risposta:

(a) $= \mathbb{R} - [-3,-1]$;

(b) $f(x) > 0$ per $x \in (-4,-3)\cup(1,3)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$, $f(x)=0$ per $x \in \{-4, 3\}$;

(c) $(-4,0), (3,0), (0,2)$;

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

(e) $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$;

(f) $(0, 2)$;

(g) $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (-1, 3)$, $f''(x) = 0$ per $x = 3$;

Valutato come 7 esercizi differenti.

45. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Risposta: