

Anteprima

di *“Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità”*

Anteprima

di “*Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità*”

Def. Una *super-algebra di Lie* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

dotato di un'applicazione bilineare $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tale che

- $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0$;
- per X, Y omogenei (cioè con $X \in \mathfrak{g}_i$, $Y \in \mathfrak{g}_j$)

$$[X, Y] = -(-1)^{|X||Y|}[Y, X] \quad \left(|X| = \text{“parità” di } X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \right)$$

- per X, Y, Z omogenei

$$(-1)^{|Z||X|}[X, [Y, Z]] + (-1)^{|Y||Z|}[Z, [X, Y]] + (-1)^{|X||Y|}[Y, [Z, X]] = 0$$

Anteprima

di “*Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità*”

algebra di Lie $\mathbb{Z}_2$ -gradata

Def. Una ~~super-algebra di Lie~~ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

dotato di un'applicazione bilineare $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tale che

- $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_0$;
- per X, Y omogenei (cioè con $X \in \mathfrak{g}_i$, $Y \in \mathfrak{g}_j$)

$$[X, Y] = -(-1)^{|X||Y|} [Y, X] \quad \left(|X| = \text{“parità” di } X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \right)$$

- per X, Y, Z omogenei

$$(-1)^{|Z||X|} [X, [Y, Z]] + (-1)^{|Y||Z|} [Z, [X, Y]] + (-1)^{|X||Y|} [Y, [Z, X]] = 0$$

Anteprima

di “*Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità*”

Avvertenza. In seguito, citeremo spesso le cosiddette “super-varietà”, “super-gruppi di Lie”, “super-algebra di Lie” e altre cose “super”, ma non fatevene un cruccio.

Si può benissimo trattare queste cose come se fossero “varietà”, “gruppi di Lie”, “algebre $\mathbb{Z}_2$ -gradate” e altri oggetti “non-super”.

È possibile fornire definizioni precise per gli analoghi *super* di tutti gli oggetti classici. Ma, in questa sede, *non faremo alcun errore se li considereremo alla stessa stregua dei loro corrispondenti “non-super”*.

Anteprima

di “*Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità*”

*Come si può presentare ad un geometra differenziale
la Teoria della Gravità (secondo la Relatività Generale)*

- spazio-tempo della Fisica — — — — — $>$ varietà diff. M_o di dim. 4;
- campo gravitazionale — — — — — $>$ coppia (g, D) dove
 - g = metrica su M_o di segnatura $(1, 3)$;
 - D = connessione di Levi-Civita g .
- equazioni soddisfatte dai campi gravitaz. — — — — — $>$

$$Ric(g) - \frac{s(g)}{2}g = \mathcal{T} \quad (\text{equazioni di Einstein})$$

($\mathcal{T}$ è un tensore di tipo $(0, 2)$, che rappresenta la massa e l'energia nello spazio-tempo; si pone $\mathcal{T} = 0$ quando si studia la gravità nel vuoto)

Super-algebre di Poincarè, spazi-tempo e teorie di supergravità

(coppia di lavori in coll. con A. Santi)

Super-algebra di Poincarè

Consideriamo $V = (\mathbb{R}^{p,q}, <, >)$, il gruppo di isometrie $P = \text{SO}(V) \ltimes V$ (*gruppo di Poincarè*) e la corrispondente algebra di Lie

$$\mathfrak{p} = \text{Lie}(P) = \mathfrak{so}(V) + V \quad \text{algebra di Poincarè}$$

Super-algebre di Poincarè

Consideriamo $V = (\mathbb{R}^{p,q}, <, >)$, il gruppo di isometrie $P = \text{SO}(V) \ltimes V$ (*gruppo di Poincarè*) e la corrispondente algebra di Lie

$$\mathfrak{p} = \text{Lie}(P) = \mathfrak{so}(V) + V \quad \text{algebra di Poincarè}$$

Def. Fissata $\mathfrak{p}$, chiamiamo *algebra di Poincarè estesa* (resp. *super-algebra di Poincarè*) ogni algebra di Lie $\mathbb{Z}_2$ -gradata (resp. super) del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p} + S \quad \text{dove}$$

- i) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p} = \mathfrak{so}(V) + V$ e $\mathfrak{g}_1 = S$ è un $\mathfrak{so}(V)$ -modulo spinoriale;
- ii) $\text{ad}_{\mathfrak{so}(V)}|_S : \mathfrak{so}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(S)$ è la rappresentazione spinoriale;
- iii) $[V, S] = 0$ e $[S, S] \subset V$.

Super-algebre di Poincarè

Consideriamo $V = (\mathbb{R}^{p,q}, <, >)$, il gruppo di isometrie $P = \text{SO}(V) \ltimes V$ (*gruppo di Poincarè*) e la corrispondente algebra di Lie

$$\mathfrak{p} = \text{Lie}(P) = \mathfrak{so}(V) + V \quad \text{algebra di Poincarè}$$

Def. Fissata $\mathfrak{p}$, chiamiamo *algebra di Poincarè estesa* (risp. *super-algebra di Poincarè*) ogni algebra di Lie $\mathbb{Z}_2$ -gradata (risp. *super*) del tipo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p} + S \quad \text{dove}$$

- i) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p} = \mathfrak{so}(V) + V$ e $\mathfrak{g}_1 = S$ è un $\mathfrak{so}(V)$ -modulo spinoriale;
- ii) $\text{ad}_{\mathfrak{so}(V)}|_S : \mathfrak{so}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(S)$ è la rappresentazione spinoriale;
- iii) $[V, S] = 0$ e $[S, S] \subset V$.

Fatto. Dati $\mathfrak{p} = \mathfrak{so}(V) + V$ ed S , ogni algebra di Poincarè estesa (risp. *super*) $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + S$ è univoc. deter. dal tensore $L : \Lambda^2 S$ (risp. $\bigvee^2 S$) $\longrightarrow V$ definito da $L(s_1, s_2) \stackrel{\text{def}}{=} [s_1, s_2]$. Tale tensore è un elemento di $\text{Hom}(\Lambda^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$ (risp. $\text{Hom}(\bigvee^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$) (Classificazione di tali tensori fatta in [Aleksseevsky - Cortés '97]).

Un'algebra di Poincarè estesa (risp. super) è detta *ammissibile* se S è $\mathcal{Cl}(V)$ -irriducibile ($\mathcal{Cl}(V) = \text{alg. di Clifford di } V$) e $L = [\cdot, \cdot]_{S \times S}$ è della forma

$$\langle L(s, s'), v \rangle = \beta(v \cdot s, s') \quad v \in V, \quad s, s' \in S \quad (\star)$$

per qualche $\beta \in S^* \otimes S^*$ non-degenere e con le seguenti proprietà:

- a) β è simmetrica o antisimmetrica;
- b) i prodotti di Clifford $v \cdot : S \rightarrow S, v \in V$, sono o tutti β -simmetrici o tutti β -anti-simmetrici;
- c) se S non è $\mathfrak{so}(V)$ -irriducibile ($\Rightarrow S = S^+ + S^-$), i due $\mathfrak{so}(V)$ -moduli $S^\pm$ sono o β -ortogonali o β -isotropici.

Un'algebra di Poincarè estesa (risp. super) è detta *ammissibile* se S è $\mathcal{Cl}(V)$ -irriducibile ($\mathcal{Cl}(V) = \text{alg. di Clifford di } V$) e $L = [\cdot, \cdot]_{S \times S}$ è della forma

$$\langle L(s, s'), v \rangle = \beta(v \cdot s, s') \quad v \in V, \quad s, s' \in S \quad (\star)$$

per qualche $\beta \in S^* \otimes S^*$ non-degenere e con le seguenti proprietà:

- a) β è simmetrica o antisimmetrica;
- b) i prodotti di Clifford $v \cdot : S \rightarrow S$, $v \in V$, sono o tutti β -simmetrici o tutti β -anti-simmetrici;
- c) se S non è $\mathfrak{so}(V)$ -irriducibile ($\Rightarrow S = S^+ + S^-$), i due $\mathfrak{so}(V)$ -moduli $S^\pm$ sono o β -ortogonali o β -isotropici.

$\text{Hom}(\Lambda^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$ ha una base fatta da L del tipo $(\star)$ (Alekseevsky - Cortés '97)
(risp. $\text{Hom}(\vee^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$)

(Ricordarsi: $\text{Hom}(\Lambda^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$ determina tutte le algebre di Poincarè estese)
(risp. $\text{Hom}(\vee^2 S, V)^{\mathfrak{so}(V)}$)

Un'algebra di Poincarè estesa (risp. super) è detta *ammissibile* se S è $\mathcal{Cl}(V)$ -irriducibile ($\mathcal{Cl}(V) = \text{alg. di Clifford di } V$) e $L = [\cdot, \cdot]|_{S \times S}$ è della forma

$$\langle L(s, s'), v \rangle = \beta(v \cdot s, s') \quad v \in V, \quad s, s' \in S \quad (\star)$$

per qualche $\beta \in S^* \otimes S^*$ non-degenere e con le seguenti proprietà:

- a) β è simmetrica o antisimmetrica;
- b) i prodotti di Clifford $v \cdot : S \rightarrow S$, $v \in V$, sono o tutti β -simmetrici o tutti β -anti-simmetrici;
- c) se S non è $\mathfrak{so}(V)$ -irriducibile ($\Rightarrow S = S^+ + S^-$), i due $\mathfrak{so}(V)$ -moduli $S^\pm$ sono o β -ortogonali or β -isotropici.

D'ora in poi, considereremo solo $\mathfrak{g}$ ammissibili.

Inoltre, la forma bilineare su $V + S$ definita da

$$(\cdot, \cdot)|_{V \times V} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (\cdot, \cdot)|_{S \times S} = \beta, \quad (\cdot, \cdot)|_{V \times S} = 0$$

verrà detta *prodotto scalare esteso*.

Spazi-tempo di tipo $\mathfrak{g}$

Notazioni. In quel che segue, fissata $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + S = (\mathfrak{so}(V) + V) + S$,

- G indica un (super) gruppo di Lie connesso con $Lie(G) = \mathfrak{g}$;
- $H \subset G$ è il (super) sottogruppo di Lie con $Lie(H) = \mathfrak{so}(V)$;
- $G_0 \subset G$ è il (super) sottogruppo di Lie con $Lie(G_0) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(V) + V$;
- M^{flat} è la (super) varietà omogenea con $M^{\text{flat}} = G/H$;
- M_o^{flat} è la (super) varietà omogenea $M_o^{\text{flat}} = G_0/H$, identificabile con la G_0 -orbita $M_o^{\text{flat}} = G_0 \cdot (eH) \subset M^{\text{flat}}$.

Spazi-tempo di tipo g

Forma di Levi. Sia $\mathcal{D} \subset TM$ una distribuzione su una varietà M . La sua *forma di Levi* in $x \in M$ è l'applicazione

$$\mathcal{L}_x : \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_x \longrightarrow T_x M / \mathcal{D}_x, \quad \mathcal{L}_x(s, s') = [X^{(s)}, X^{(s')}]_x / \mathcal{D}_x$$

dove $X^{(s)}, X^{(s')} \in \mathcal{D}$ sono campi vettoriali con $X_x^{(s)} = s$, $X_x^{(s')} = s'$.

Esempio omogeneo. Sia $\mathcal{D}$ l'unica distribuzione G -invariante su $M^{\text{flat}} = G/H$ tale che in $o = eH$

$$\mathcal{D}_o = S \subset T_o M^{\text{flat}} \quad (T_o M^{\text{flat}} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{so}(V) = V + S) .$$

La sua forma di Levi è G -invariante. In $o = eH$ è data da

$$\mathcal{L}_o : S \times S \longrightarrow T_o M / S \simeq V, \quad \mathcal{L}_o(s, s') = [s, s'] .$$

Spazi-tempo di tipo $\mathfrak{g}$

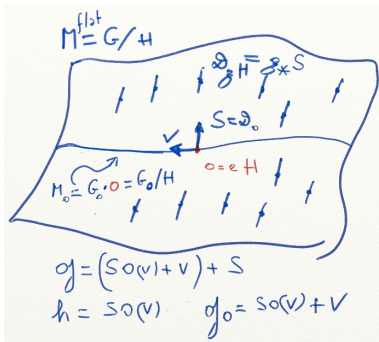
Uno *spazio-tempo piatto di tipo $\mathfrak{g}$* è una terna $(M^{\text{flat}}, M_o^{\text{flat}}, \mathcal{D})$ dove

- $M^{\text{flat}} = G/H$ (ricordare che $\text{Lie}(H) = \mathfrak{so}(V)$);
- $M_o^{\text{flat}} = G_0 \cdot eH = G_0/H$ (ricordare che $\text{Lie}(G_o) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(V) + V$);
- $\mathcal{D}$ è la distribuzione G -invariante con $\mathcal{D}_o = S$ ($o \stackrel{\text{def}}{=} eH$).

Spazi-tempo di tipo $\mathfrak{g}$

Uno spazio-tempo piatto di tipo $\mathfrak{g}$ è una terna $(M^{\text{flat}}, M_o^{\text{flat}}, \mathcal{D})$ dove

- $M^{\text{flat}} = G/H$ (ricordare che $\text{Lie}(H) = \mathfrak{so}(V)$);
- $M_o^{\text{flat}} = G_0 \cdot eH = G_0/H$ (ricordare che $\text{Lie}(G_0) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(V) + V$);
- $\mathcal{D}$ è la distribuzione G -invariante con $\mathcal{D}_o = S$ ($o \stackrel{\text{def}}{=} eH$).



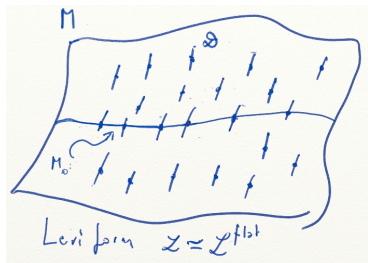
Spazi-tempo di tipo $\mathfrak{g}$

Uno *spazio-tempo piatto di tipo $\mathfrak{g}$* è una terna $(M^{\text{flat}}, M_o^{\text{flat}}, \mathcal{D})$ dove

- $M^{\text{flat}} = G/H$ (ricordare che $\text{Lie}(H) = \mathfrak{so}(V)$);
- $M_o^{\text{flat}} = G_0 \cdot eH = G_0/H$ (ricordare che $\text{Lie}(G_o) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(V) + V$);
- $\mathcal{D}$ è la distribuzione G -invariante con $\mathcal{D}_o = S$ ($o \stackrel{\text{def}}{=} eH$).

Def. Uno *spazio-tempo di tipo $\mathfrak{g}$* è una terna $(M, M_o, \mathcal{D})$ dove

- M è una (super)varietà con $\dim M = \dim V + \dim S = \dim M^{\text{flat}}$;
- M_o è una (super)sottovarietà di M con $\dim M_o = \dim V = \dim M_o^{\text{flat}}$;
- $\mathcal{D}$ è una distribuzione, trasversale a M_o e con forma di Levi $\mathcal{L}$ equivalente alla forma di Levi di $\mathcal{D} \subset TM^{\text{flat}}$ in tutti i punti (cioè esiste un campo di basi per gli spazi tangenti, in cui le componenti di $\mathcal{L}$ sono costanti e uguali a quelli della forma di Levi di $\mathcal{D} \subset TM^{\text{flat}}$).



Esempi di spazi-tempo non-piatti:

- 1) *super-spazi anti-deSitter* $M = \tilde{G}/\tilde{H}$,
dove $M_o \simeq \mathrm{SO}_{p+1,q}/\mathrm{SO}_{p,q}$ e $\tilde{G}$ è un
supergruppo con $\mathrm{Lie}(\tilde{G}) = \mathfrak{osp}_{p+1,q|2r}$
- 2) sottovarietà CR di $\mathbb{C}^{n_1|n_2}$ (vedi
Ogievetskij e coll.)

Def. Uno *spazio-tempo di tipo g* è una terna $(M, M_o, \mathcal{D})$ dove

- M è una (super)varietà con $\dim M = \dim V + \dim S = \dim M^{\mathrm{flat}}$;
- M_o è una (super)sottovarietà di M con $\dim M_o = \dim V = \dim M_o^{\mathrm{flat}}$;
- $\mathcal{D}$ è una distribuzione, trasversale a M_o e con forma di Levi $\mathcal{L}$ equivalente alla forma di Levi di $\mathcal{D} \subset TM^{\mathrm{flat}}$ in tutti i punti (cioè esiste un campo di basi per gli spazi tangenti, in cui le componenti di $\mathcal{L}$ sono costanti e uguali a quelli della forma di Levi di $\mathcal{D} \subset TM^{\mathrm{flat}}$).

Campi gravitazionali su spazi tempo di tipo g

Sia $g = \mathfrak{so}(V) + V + S$ e $(M, M_o, \mathcal{D})$ spazio-tempo di tipo g .

Def. Un *campo gravitazionale su M* è una coppia (g, ∇) , formata da un campo tensoriale g di tipo $(0, 2)$ ed una connessione ∇ tale che

- per ogni $x \in M$, fra i campi di riferimenti lineari su intorno $\mathcal{U}$ di x

$$\iota^{(y)} : V + S \longrightarrow T_y M, \quad y \in \mathcal{U},$$

che soddisfano (*esistono per le ipotesi su $\mathcal{D}$*)

i) $\iota^{(y)}(S) = \mathcal{D}_y$;

ii) $\iota_*^{(y)}(L) = \mathcal{L}_y$ (L = tensore che definisce g , $\mathcal{L}$ = forma di Levi di $\mathcal{D}$);

ce n'è uno che soddisfa anche

iii) $\iota_*^{(y)}(\cdot, \cdot) = g_y$ ($(\cdot, \cdot)$ = prodotto scalare esteso);

- $\mathcal{D}$ è parallela rispetto a ∇ ;
- $\nabla g = 0, \nabla \mathcal{L} = 0$.

Supergravità di tipo g

Una *supergravità di tipo g* è una coppia

$$\mathcal{G} = \left(\begin{array}{cc} (M, M_o, \mathcal{D}) & ; \\ \text{spazio-tempo di tipo g} & \quad \text{campo gravit.} \end{array} \right) .$$

M_o è detto *spazio-tempo fisico*. Il fibrato $\pi : \mathcal{S} = \mathcal{D}|_{M_o} \rightarrow M_o$ è detto *fibrato spinoriale fisico*. Chiamiamo *campi fisici di G* i seguenti tensori su M_o (T = torsione di ∇ ; $\pi^{\mathcal{D}}$, $\pi^{\mathcal{D}^\perp}$ = proiettori g -ortogonali su $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\perp$):

- a) $\vartheta = \pi^{\mathcal{D}}|_{TM_o} \in T^*M_o \otimes \mathcal{S}$ (*gravitino*);
- b) $\hat{g} = g(\pi^{\mathcal{D}^\perp}(\cdot), \pi^{\mathcal{D}^\perp}(\cdot))|_{TM_o \times TM_o} \in \vee^2 T^*M_o$ (*gravitone*);
- c) $\mathbb{A} = -\pi^{\mathcal{D}} \circ T|_{TM_o \times \mathcal{S}} \in T^*M_o \otimes \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S}$ (*campo A*);
- d) Connessioni $D, \mathbb{D}$ su TM_o e $\mathcal{S}$ (*connessioni metrica e spinoriale*)

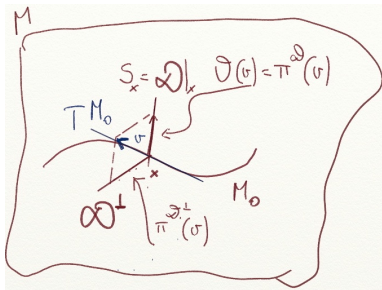
$$\underset{\text{conn. metrica}}{D_X Y} = (\pi^{\mathcal{D}^\perp}|_{TM_o})^{-1} \left(\nabla_X (\pi^{\mathcal{D}^\perp}(Y)) \right) , \quad \underset{\text{conn. spinoriale}}{\mathbb{D}_X s} = \underset{\text{conn. metrica}}{D_X s} + \mathbb{A}(X, s)$$

Supergravità di tipo g

Una *supergravità di tipo g* è una coppia

$$\mathcal{G} = \left(\begin{array}{cc} (M, M_o, \mathcal{D}) & ; \\ \text{spazio-tempo di tipo g} & \text{campo gravit.} \end{array} \right) .$$

M_o è detto *spazio-tempo fisico*. Il fibrato $\pi : \mathcal{S} = \mathcal{D}|_{M_o} \rightarrow M_o$ è detto *fibrato spinoriale fisico*. Chiamiamo *campi fisici di $\mathcal{G}$* i seguenti tensori su M_o (T = torsione di ∇ ; $\pi^{\mathcal{D}}, \pi^{\mathcal{D}^\perp}$ = proiettori g -ortogonali su $\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp$):



(il gravitino è il proiettore su $\mathcal{D}|_{M_o} = \mathcal{S}$)

(il gravitone è il prodotto scalare fra proiezioni su $\mathcal{D}^\perp|_{M_o}$)

“Esiste un’unica supergravità di Levi-Civita”

La torsione T di un campo gravitazionale (g, ∇) si decompone in

$$T = \underbrace{T^{\mathcal{D}^\perp}}_{(\mathcal{D}^\perp \times \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp)} + \underbrace{\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp}}_{(\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{T^{\mathcal{D}}}_{(\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{\mathcal{C}^{\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}; \mathcal{D}}}_{(\Lambda^2 \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{\mathcal{H}^{\Lambda^2 \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}}}_{(=\mathcal{L})} + \underbrace{\mathcal{H}^{\Lambda^2 \mathcal{D}; \mathcal{D}^\perp}}_{(=\mathcal{L})}.$$

Il “campo A” coincide con $\mathbb{A} = - (T^{\mathcal{D}} + \mathcal{C}^{\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}; \mathcal{D}}) \Big|_{TM_o \otimes \mathcal{S}}.$

Teorema. *Data g , esiste un unico campo gravitazionale (g, ∇) con $T^{\mathcal{D}^\perp} = 0$ e tale che la mappa $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp}(s, \cdot, \cdot) : \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ è auto-aggiunta rispetto a g per ogni $s \in \mathcal{D}$.*

Le coppie (g, ∇) di questo tipo sono dette Levi-Civita.

“Esiste un’unica supergravità di Levi-Civita”

La torsione T di un campo gravitazionale (g, ∇) si decompone in

$$T = \underbrace{T^{\mathcal{D}^\perp}}_{(\mathcal{D}^\perp \times \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp)} + \underbrace{\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp}}_{(\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{T^{\mathcal{D}}}_{(\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{\mathcal{C}^{\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}; \mathcal{D}}}_{(\Lambda^2 \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D})} + \underbrace{\mathcal{H}^{\Lambda^2 \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}}}_{(=\mathcal{L})} + \underbrace{\mathcal{H}^{\Lambda^2 \mathcal{D}; \mathcal{D}^\perp}}_{(=\mathcal{L})}.$$

Il “campo A” coincide con $\mathbb{A} = - (T^{\mathcal{D}} + \mathcal{C}^{\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}; \mathcal{D}}) \Big|_{TM_o \otimes \mathcal{S}}.$

Teorema. *Data g , esiste un unico campo gravitazionale (g, ∇) con $T^{\mathcal{D}^\perp} = 0$ e tale che la mappa $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp}(s, \cdot, \cdot) : \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ è autoaggiunta rispetto a g per ogni $s \in \mathcal{D}$.*

Una coppia (g, ∇) è detta Levi-Civita forte se $T^{\mathcal{D}^\perp} = \mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp} = T^{\mathcal{D}} = 0$.

Se $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}); (g, \nabla))$ è Levi-Civita forte, il gravitone, gravitino e campo A determinano completamente le connessioni metrica e spinoriale; si possono quindi considerare “campi fisici” solo questi tre .

“Formalismo in componenti” e “formulazioni su superspazi”

Le teorie della supergravità costruite finora si differenziano per:

- a) la dimensione D dello spazio-tempo fisico M_o ($4 \leq D \leq 11$);
- b) la super-algebra $\mathfrak{g}$ (algebra delle super-simmetrie del “vuoto”);
- c) i campi fisici interagenti con il gravitone, gravitino e campo A.

Originariamente, la costruzione avveniva nel cosiddetto *formalismo in componenti*, in cui tutti gli enti sono rappresentati solo tramite componenti e definiti solo su M_o . Le eq. della teoria sono eq. di Eulero-Lagrange di una Lagrangiana $\mathcal{L}$, che viene costruita *invariante per particolari trasformazioni, che dipendono sia dalle coordinate sia dai valori dei campi - sono dette (localizzazioni di) supersimmetrie.*

Le supersimmetrie non erano fissate a priori. Venivano fissati solo i loro termini al prim'ordine nelle costanti di interazione. *Supersimmetrie e Lagrangiane venivano determinate iterativamente e in parallelo (metodo di Noether).*

“Formalismo in componenti” e “formulazioni su superspazi”

Nel nostro formalismo (è una generalizzazione delle cosiddette **formulazioni su superspazi**), le teorie di supergravità sono rappresentate da k-plesse $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k-1})$ costituite da:

a) una supergrav. $\mathcal{G}$ di tipo g

$$\mathcal{G} = \left(\begin{array}{cc} (M, M_o, \mathcal{D}) & ; \quad (g, \nabla) \\ \text{spazio-tempo di tipo } g & \text{campo grav.} \end{array} \right)$$

b) un insieme di campi tensoriali $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k-1}$ sullo spazio-tempo M .

I campi delle teorie nel “formalismo in componenti” corrispondono ai “campi fisici” di $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \dots)$, cioè al gravitone, gravitino, campo A e alle restrizioni $\mathcal{F}_i|_{TM_o + \mathcal{D}|_{M_o}}, \nabla \mathcal{F}_i|_{TM_o + \mathcal{D}|_{M_o}}$ ecc.

“Formalismo in componenti” e “formulazioni su superspazi”

Primo Vantaggio. Le supersimmetrie, scritte “in componenti”, sono in realtà le “trasformazioni” di $\hat{g}$, ϑ , $\mathbb{A}$ etc. date dalle derivate di Lie $\mathcal{L}_\varepsilon g$, $\mathcal{L}_\varepsilon \pi^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{L}_\varepsilon T$ lungo campi vettoriali $\varepsilon \in \mathcal{D}$ con $\nabla_s \varepsilon|_{M_0} = 0$ per ogni $s \in \mathcal{D}$. **Affermazione è vera in $D = 4$ e $D = 11$ (si ottiene combinando risultati di Regge, D'Auria, Fre', ecc.) - ci si aspetta sia vera sempre.**

“Formalismo in componenti” e “formulazioni su superspazi”

Primo Vantaggio. Le supersimmetrie, scritte “in componenti”, sono in realtà le “trasformazioni” di $\hat{g}$, ϑ , $\mathbb{A}$ etc. date dalle derivate di Lie $\mathcal{L}_\varepsilon g$, $\mathcal{L}_\varepsilon \pi^D$, $\mathcal{L}_\varepsilon T$ lungo campi vettoriali $\varepsilon \in \mathcal{D}$ con $\nabla_s \varepsilon|_{M_0} = 0$ per ogni $s \in \mathcal{D}$. **Affermazione è vera in $D = 4$ e $D = 11$ (si ottiene combinando risultati di Regge, D'Auria, Fre', ecc.) - ci si aspetta sia vera sempre.**

Secondo Vantaggio. I vincoli e le equazioni su M_0 , ottenute “in componenti”, sono restrizioni di equazioni tensoriali su campi definiti su M e sono equivalenti a quest'ultime. **Affermazione vera in $D = 4$ e $D = 11$ e verosimilmente lo è sempre.** L'invarianza per supersimmetrie ($\simeq$ derivate di Lie) è quindi conseguenza del carattere tensoriale delle equaz.

“Formalismo in componenti” e “formulazioni su superspazi”

Primo Vantaggio. Le supersimmetrie, scritte “in componenti”, sono in realtà le “trasformazioni” di $\hat{g}$, ϑ , $\mathbb{A}$ etc. date dalle derivate di Lie $\mathcal{L}_\varepsilon g$, $\mathcal{L}_\varepsilon \pi^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{L}_\varepsilon T$ lungo campi vettoriali $\varepsilon \in \mathcal{D}$ con $\nabla_s \varepsilon|_{M_o} = 0$ per ogni $s \in \mathcal{D}$. **Affermazione è vera in $D = 4$ e $D = 11$ (si ottiene combinando risultati di Regge, D'Auria, Fre', ecc.) - ci si aspetta sia vera sempre.**

Secondo Vantaggio. I vincoli e le equazioni su M_o , ottenute “in componenti”, sono restrizioni di equazioni tensoriali su campi definiti su M e sono equivalenti a quest'ultime. **Affermazione vera in $D = 4$ e $D = 11$ e verosimilmente lo è sempre.** L'invarianza per supersimmetrie ($\simeq$ derivate di Lie) è quindi conseguenza del carattere tensoriale delle equaz.

Terzo vantaggio. Nella descrizione “in componenti” le supersimmetrie delle soluzioni con gravitino nullo, sono spinori di Killing (generaliz.) su M_o . Nella nostra “formulaz. di superspazio”, le supersimmetrie di quelle soluzioni sono date da campi di Killing ε del campo g su M , tangenti a $\mathcal{D}$ e con $\nabla_s \varepsilon|_{M_o} = 0$. $\Rightarrow$ **Interp. geom. degli spinori di Killing.**

Supergravità in 11D di Cremmer-Julia-Scherk

E' la teoria dei "campi fisici su M_o " corrispondenti a coppie $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ in cui:

- $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ supergrav. di tipo $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}_{10,1} + \mathbb{R}^{10,1}) + \mathbb{C}^{32}$;
- $\mathcal{F}$ è una 4-forma tale che $\iota_X \mathcal{F} = 0$ per ogni $X \in \mathcal{D}$.

La coppia $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ deve soddisfare alcuni vincoli ed equazioni.

Supergravità in 11D di Cremmer-Julia-Scherk

- E' la teoria dei "campi fisici su M_o " corrispondenti a coppie $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ in cui:
- $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ supergrav. di tipo $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}_{10,1} + \mathbb{R}^{10,1}) + \mathbb{C}^{32}$;
 - $\mathcal{F}$ è una 4-forma tale che $\iota_X \mathcal{F} = 0$ per ogni $X \in \mathcal{D}$.

La coppia $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ deve soddisfare alcuni vincoli ed equazioni.

Vincoli

- 1) $\mathcal{G}$ deve essere Levi-Civita forte, cioè $T^{\mathcal{D}^\perp} = \mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp} = T^{\mathcal{D}} = 0$;
- 2) $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}}(s, X) = \frac{1}{144}(X \wedge \mathcal{F}^\sharp - 8(\iota_X \mathcal{F})^\sharp) \cdot s$,
dove: $\mathcal{F}^\sharp \in \Lambda^4 \mathcal{D}^\perp$ ha come componenti quelle di $\mathcal{F}$ sollevate con le g^{ij} mentre “ $\cdot$ ” è il prodotto di Clifford fra vettori (= elementi in $\mathcal{D}^\perp$) e spinori (= elementi in $\mathcal{D}$).

Supergravità in 11D di Cremmer-Julia-Scherk

E' la teoria dei "campi fisici su M_o " corrispondenti a coppie $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ in cui:
 - $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ supergrav. di tipo $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}_{10,1} + \mathbb{R}^{10,1}) + \mathbb{C}^{32}$;
 - $\mathcal{F}$ è una 4-forma tale che $\iota_X \mathcal{F} = 0$ per ogni $X \in \mathcal{D}$.

La coppia $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ deve soddisfare alcuni vincoli ed equazioni.

Equazioni

$$\text{i) } \begin{cases} d\mathcal{F} + d\mathcal{Z} = 0, \\ (d * \mathcal{F})^{\mathcal{D}^\perp} + \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. di Maxwell});$$

$$\text{ii) } \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j ((\cdot)^{\mathcal{D}^\perp} \wedge E_i \wedge E_j) \cdot \{(\pi^{\mathcal{D}} \circ T)(E_i, E_j)\} = 0$$

(eq. di Rarita-Schwinger);

$$\text{iii) } \text{Ric}^{\mathcal{D}^\perp} - \frac{1}{2} s^{\mathcal{D}^\perp} g^{\mathcal{D}^\perp} - \frac{1}{24} \left(\|\mathcal{F}\|_g^2 g^{\mathcal{D}^\perp} - 8g(\iota_{(\cdot)} \mathcal{F}, \iota_{(\cdot)} \mathcal{F}) \right) = 0$$

(eq. di Einstein).

dove $\mathcal{Z}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{8} \sum_{\sigma \in P_4} \varepsilon(\sigma) g \left(iX_{\sigma(1)}^{\mathcal{D}}, (X_{\sigma(2)}^{\mathcal{D}^\perp} \wedge X_{\sigma(3)}^{\mathcal{D}^\perp}) \cdot X_{\sigma(4)}^{\mathcal{D}} \right)$ e (E_i, E_α)
 campo di rifer. g -ortonorm.

Interpretazione degli spinori di Killing come campi di Killing

Sia $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}(V) + V) + S$ ammissibile e $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ con

- $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp} = 0 = T^{\mathcal{D}^\perp}$;
- *il gravitino nullo* ($\Rightarrow TM_o = \mathcal{D}^\perp|_{M_o}$, $\widehat{g} = g|_{TM_o \times TM_o}$ e $D = \nabla|_{\mathfrak{X}(M_o) \times \mathfrak{X}(M_o)}$ è uguale alla connessione di Levi-Civita di $\widehat{g}$);
- *campo A nullo* ($\Rightarrow \mathbb{D}$ è la connessione spinoriale determinata da D)

Interpretazione degli spinori di Killing come campi di Killing

Sia $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}(V) + V) + S$ ammissibile e $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ con

- $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp; \mathcal{D}^\perp} = 0 = T^{\mathcal{D}^\perp}$;
- *il gravitino nullo* ($\Rightarrow TM_o = \mathcal{D}^\perp|_{M_o}$, $\widehat{g} = g|_{TM_o \times TM_o}$ e $D = \nabla|_{\mathfrak{X}(M_o) \times \mathfrak{X}(M_o)}$ è uguale alla connessione di Levi-Civita di $\widehat{g}$);
- *campo A nullo* ($\Rightarrow \mathbb{D}$ è la connessione spinoriale determinata da D)

Prop. Sia ξ un campo vettoriale su M con $\xi|_{M_o} \in \mathcal{D}|_{M_o}$ e $\nabla_t \xi|_{M_o} = 0$ per ogni $t \in \mathcal{D}|_{M_o}$. Se ξ è campo di Killing di (M, g) , allora $s = \xi|_{M_o}$ è t.c. $D_X s = X \cdot s$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M_o)$, i.e. è spinore di Killing di $(M_o, \widehat{g})$.

Interpretazione degli spinori di Killing come campi di Killing

Sia $\mathfrak{g} = (\mathfrak{so}(V) + V) + S$ ammissibile e $\mathcal{G} = ((M, M_o, \mathcal{D}), (g, \nabla))$ con

- $\mathcal{C}^{\mathcal{D}, \mathcal{D}^\perp}; \mathcal{D}^\perp = 0 = T^{\mathcal{D}^\perp}$;
- *il gravitino nullo* ($\Rightarrow TM_o = \mathcal{D}^\perp|_{M_o}$, $\hat{g} = g|_{TM_o \times TM_o}$ e $D = \nabla|_{\mathfrak{X}(M_o) \times \mathfrak{X}(M_o)}$ è uguale alla connessione di Levi-Civita di $\hat{g}$);
- *campo A nullo* ($\Rightarrow \mathbb{D}$ è la connessione spinoriale determinata da D)

Prop. Sia ξ un campo vettoriale su M con $\xi|_{M_o} \in \mathcal{D}|_{M_o}$ e $\nabla_t \xi|_{M_o} = 0$ per ogni $t \in \mathcal{D}|_{M_o}$. Se ξ è campo di Killing di (M, g) , allora $s = \xi|_{M_o}$ è t.c. $D_X s = X \cdot s$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M_o)$, i.e. è spinore di Killing di $(M_o, \hat{g})$.

Dim. ξ Killing $\Rightarrow \mathcal{L}_\xi g(X, t) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{D}^\perp$ e $t \in \mathcal{D}$. Tuttavia

$$\mathcal{L}_\xi g(X, t)|_{M_o} = \xi \cdot g(X, t)|_{M_o} + g([\xi, X], t)|_{M_o} + g(X, [\xi, t])|_{M_o}$$

$$\stackrel{\text{Ipotesi su } g, \nabla \text{ e torsione}}{=} g(\nabla_X s, t|_{M_o}) - g(X, [\xi, t]|_{M_o}) \stackrel{\text{g ammiss.}}{=} \underset{\text{è la forma di Levi}}{g(\nabla_X s, t|_{M_o}) - g(X \cdot s, t|_{M_o})}$$

$g(D_X s, t|_{M_o}) - g(X \cdot s, t|_{M_o})$. È nullo per ogni t e quindi $D_X s = X \cdot s$