

Varietà Nearly Kähler 6-dimensionali di cohomogeneità uno.

F. Podestà , A. Spiro

Def. Una varietà (M, g) è detta nearly Kähler (NK) se ammette una struttura quasi complessa J t.c. g sia J -Hermitiana e

$$(\nabla_X^g J)X = 0$$

per ogni campo di vettori X

- Introdotte da Gray (1970) , con esempi degli spazi 3-simmetrici:
e.g. $S^6 = G_2/SU_3$, $\mathbb{CP}^3 = Sp_2/T^1 \times Sp_1$;
- Classificazione di Gray Hervella (1980).
- La connessione Hermitiana canonica $\bar{\nabla}$ (con $\bar{\nabla}g = 0$, $\bar{\nabla}J = 0$) ha torsione $T \in \Lambda^3$ che è $\bar{\nabla}$ -parallela ($\bar{\nabla}T = 0$).

Def. Una varietà NK è detta *strict* nearly Kähler (SNK) se vale

$$\nabla_X^g J = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Teorema (Nagy) *Ogni varietà NK è localmente il prodotto di una varietà Kähler e di una SNK.*

Teorema (Nagy, 2007) *Ogni varietà completa SNK è (a meno di un ricoprimento finito) un prodotto Riemanniano i cui fattori appartengono alle seguenti classi:*

- (i) varietà 3-simmetriche;
- (ii) twistor spaces di varietà quaternion Kähler positive;
- (iii) SNK-manifolds di dimensione 6.

[Dimostrazione basata sull'olonomia di $\bar{\nabla}$ e risultati di Cleyton e Swann quando l'olonomia è irriducibile.]

Varietà SNK di dimensione 6

- Proprietà: Se una varietà M^6 è NK ma non-Kähler, allora è SNK.
- Ogni SNK in dimensione 6 è Einstein con curvatura scalare positiva
- Sono caratterizzate dall'esistenza (locale) di uno spinore di Killing reale
- Se M^6 è SNK, allora $M \times \mathbb{R}^+$ ammette una metrica Riemanniana con ologonomia G_2

- Caso omogeneo: Butruille (2006) classifica il caso omogeneo in dimensione 6 provando che sono esattamente gli spazi 3-simmetrici (congettura di Gray-Wolf):

(1) $S^6 = G_2/SU_3$;

(2) $\mathbb{CP}^3 = Sp_2/T^1 \times Sp_1$;

(3) $F_3 = SU_3/T^2$;

(4) $S^3 \times S^3 = (SU_2)^3/(SU_2)_{\text{diag}}$.

Cohomogeneità uno

$G \subset Iso(M^6, g)$ compatto con orbite principali di codimensione uno.
Se M è compatta, esistono esattamente due orbite singolari e
 $M/G = [0, 1]$.

Teorema (–, Spiro)

(1) Se M^6 è SNK compatta e $\pi_1(M) = \{0\}$, allora vale una delle seguenti possibilità:

- (i) $G = \mathrm{SU}_3$ o $G = \mathrm{SO}_4$ e M è G -diffeomorfa a S^6 ;
- (ii) $G = \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ e M è G -diffeomorfa a $\mathbb{CP}^3$ o $S^3 \times S^3$

(2) Se M^6 è SNK e G è semplice, allora M^6 ha curvatura costante e $G = \mathrm{SU}_3$.

Resta da studiare $G = \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$: qui isotropia principale $K = T^1$ con moduli equivalenti nella rapp. di isotropia.

Orbite

Dato $G = \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$

- $M = S^6$ e $\mathcal{O}_1 = G/(\mathrm{SU}_2)_{\mathrm{diag}} \cong S^3$, $\mathcal{O}_2 = G/T^1 \times \mathrm{SU}_2 = S^2$;
- $M = S^3 \times S^3$ e $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = G/(\mathrm{SU}_2)_{\mathrm{diag}} \cong S^3$.

Qui la parte principale è $TS^3 = S^3 \times \mathbb{R}^3$.

3-forme stabili e varietà SNK [Hitchin]

Sia $V \cong \mathbb{R}^6$ con una orientazione $\tau \in \Lambda^6(V^*)$ e $G = GL(V)^+$. Si ha

$$\Lambda^3(V^*) = \{P < 0\} \cup \{P = 0\} \cup \{P > 0\},$$

dove P è un polinomio $SL(V)$ -invariante e $\Omega^\pm := \{\pm P > 0\}$ sono G -orbite.

3-forme stabili e varietà SNK [Hitchin]

Sia $V \cong \mathbb{R}^6$ con una orientazione $\tau \in \Lambda^6(V^*)$ e $G = GL(V)^+$. Si ha

$$\Lambda^3(V^*) = \{P < 0\} \cup \{P = 0\} \cup \{P > 0\},$$

dove P è un polinomio $SL(V)$ -invariante e $\Omega^\pm := \{\pm P > 0\}$ sono G -orbite.

Una forma $\theta \in \Omega^-$ è detta *stabile* $\rightarrow$ definisce una struttura complessa J_θ

$$J_\theta := \frac{1}{\sqrt{-P(\theta)}} S_\theta, \quad A(i_v \theta \wedge \theta) = S_\theta(v) \otimes \tau,$$

dove $A : \Lambda^5(V^*) \rightarrow V \otimes \Lambda^6(V^*)$ è un isomorfismo

Le equazioni

Teorema ([CS], [H], [RC], [S]) Dati $\omega \in \Lambda^2 T^*M$ e $\psi \in \Lambda^3 T^*M$ tali che

- i) ψ è stabile, ω è J_ψ -invariante e $g = \omega(\cdot, J_\psi \cdot)$ è definita;
- ii) esiste $\mu \in \mathbb{R}^+$ con

$$\begin{cases} d\omega = 3\psi \\ d(J_\psi^* \psi) = -2\mu \cdot \omega \wedge \omega \end{cases} \quad (1)$$

Allora (g, J_ψ) (o $(g, -J_\psi)$) è una struttura SNK su M con curvatura scalare $s = 30\mu$.

Viceversa, sia (g, J) una struttura SNK su M con curvatura scalare costante s e sia $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ e $\psi = \frac{1}{3}d\omega$. Allora ω e ψ soddisfano a (i) e (ii) con $\mu = \frac{s}{30}$ e $J = \pm J_\psi$.

Le equazioni in cohm = 1

Sia $G = \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$ che agisce con cohomogeneità 1 e sia γ_t ($t \in]a, b[$), una curva trasversa alle orbite principali (sarà una geodetica normale).

Indichiamo con $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,5}$ una base di $\Lambda^2(T_{\gamma_t}^* M)^K$, dove $K = T^1$ è l'isotropia principale.

Cerchiamo ora la forma di Kähler ω come

$$\omega = \sum_{i=1}^5 f_i(t) \omega_i, \quad f_i \in C^\infty(]a, b[)$$

ed imponiamo le equazioni. Il sistema risultante è il seguente

Per $t \in]a, b[$

i) $f_1 < 0 < f_4$ e $(f_4')^2 - \left(f_2' + \frac{f_1}{4}\right) \left(f_3' - \frac{f_1}{4}\right) > 0$;

ii) f_1, f_2, f_3, f_4 soddisfano il sistema differenziale

$$\begin{cases} [(f_2' + \frac{1}{4}f_1)f_1]' + 12\mu f_1 f_2 = 0, \\ [(f_3' - \frac{1}{4}f_1)f_1]' + 12\mu f_1 f_3 = 0, \\ (f_4' f_1)' - 4\frac{f_4}{f_1} + 12\mu f_1 f_4 = 0, \end{cases}$$

iii) e soddisfano le condizioni algebro-differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} 4f_4^2 - \left((f_4')^2 - \left(f_2' + \frac{f_1}{4}\right) \left(f_3' - \frac{f_1}{4}\right)\right) (f_1)^2 = 0, \\ f_1(f_2' - f_3' + \frac{1}{2}f_1) + 48\mu(f_2 f_3 - f_4^2) = 0. \end{cases}$$

Teorema 1 *Esiste una famiglia a 2-parametri di strutture SNK non isometriche e non localmente omogenee su $M =]-\varepsilon, \varepsilon[\times G/K$ per un opportuno $\varepsilon > 0$*

[Condizioni di equivalenza isometrica + riparametrizzazione per ricondursi ad una ODE]

Le soluzioni su $M = TS^3$.

Problema 1: trovare tutte le soluzioni (a meno di automorfismi) $(f_1, \dots, f_4)$ che determinano strutture SNK su M . Quindi :

- i) individuare le condizioni perche' una soluzione $(f_1, \dots, f_4)$ determini una struttura su $] - \varepsilon, \varepsilon[\times G/K$ estendibile in modo liscio a M ;
- ii) provare un teorema di esistenza di soluzioni che soddisfino alle condizioni (i);
- iii) individuare quando due soluzioni determinano strutture isomorfe e quando una soluzione determina una struttura localmente omogenea.

Problema 2: quali soluzioni del Problema 1 sono complete ?

- $TS^3 = S^3 \times \mathbb{R}^3$ si compattifica a S^6 e $S^3 \times S^3$, quindi esistono due soluzioni localmente omogenee e non isomorfe.

Teorema 2 *Esiste una famiglia $\mathcal{F}$ ad un parametro di strutture SNK su M che sono G -invarianti e non localmente isometriche.*

Esattamente due di queste strutture sono localmente omogenee.

Data una SNK-struttura (g, J) che sia G -invariante su M , allora o (g, J) o $(g, -J)$ appartiene a $\mathcal{F}$.

Punto più difficile e' (ii) del Problema 1.

- in un nuovo opportuno parametro s il sistema si riduce ad un sistema singolare di equazioni del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{P}' = \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}' = \frac{1}{s^2}A(\mathcal{P}) + \frac{1}{s}B(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + C(s, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) \end{cases}$$

dove $\mathcal{P} = (p_1(s), \dots, p_4(s))$, A, B, C sono lisce e

$$\mathcal{P}(0) = (\lambda, -3\lambda\sqrt{\lambda}, 0, 3\lambda\sqrt{\lambda}), \quad \mathcal{Q}(0) = 0, \quad \lambda > 0,$$

- in un nuovo opportuno parametro s il sistema si riduce ad un sistema singolare di equazioni del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{P}' = \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}' = \frac{1}{s^2}A(\mathcal{P}) + \frac{1}{s}B(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + C(s, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) \end{cases}$$

dove $\mathcal{P} = (p_1(s), \dots, p_4(s))$, A, B, C sono lisce e

$$\mathcal{P}(0) = (\lambda, -3\lambda\sqrt{\lambda}, 0, 3\lambda\sqrt{\lambda}), \quad \mathcal{Q}(0) = 0, \quad \lambda > 0,$$

- si prova che esiste una *serie formale* $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{Q}})$ soluzione del sistema.

- in un nuovo opportuno parametro s il sistema si riduce ad un sistema singolare di equazioni del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{P}' = \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}' = \frac{1}{s^2}A(\mathcal{P}) + \frac{1}{s}B(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) + C(s, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) \end{cases}$$

dove $\mathcal{P} = (p_1(s), \dots, p_4(s))$, A, B, C sono lisce e

$$\mathcal{P}(0) = (\lambda, -3\lambda\sqrt{\lambda}, 0, 3\lambda\sqrt{\lambda}), \quad \mathcal{Q}(0) = 0, \quad \lambda > 0,$$

- si prova che esiste una *serie formale* $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{Q}})$ soluzione del sistema
- si usa il teorema di Malgrange : esiste una soluzione liscia $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ che ha $(\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{Q}})$ come espansione di Taylor per $s = 0$.

Problema 2: quali soluzioni sono complete ?

Problema 2: quali soluzioni sono complete ?

Non sappiamo