

Strutture riemanniane Γ -simmetriche del gruppo di Heisenberg

Paola Piu

Università degli Studi di Cagliari

New Trend in Differential Geometry

L'Aquila, 7–9 settembre 2011



Definizione (Lutz 1981)

Sia Γ un gruppo abeliano finitamente generato. Uno spazio omogeneo $M = G/H$ è detto Γ -simmetrico

- 1 Il gruppo di Lie G è connesso.
- 2 Il gruppo G è effettivo su G/H (cioè l'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ di H non contiene un ideale proprio non nullo dell'Algebra $\mathfrak{g}$ di G).
- 3 Esiste $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut } G$, omomorfismo iniettivo, tale che

$$G_0^\Gamma \subset H \subset G^\Gamma,$$

dove

$$G^\Gamma = \{x \in G / \rho(\gamma)(x) = x, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

è il sottogruppo di elementi fissati da $\rho(\Gamma)$ e G_0^Γ è la sua componente connessa.

- Il caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ coincide con la definizione di spazio simmetrico.

Spazio Γ -simmetrico

- Il caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ coincide con la definizione di spazio simmetrico.
- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_k$, il grupo ciclico d'ordine k , coincide con k -simmetrico. (Kac, Ledger - Obata , Gray -Wolf (68), Kowalski (80)).

- Il caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ coincide con la definizione di spazio simmetrico.
- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_k$, il grupo ciclico d'ordine k , coincide con k -simmetrico. (Kac, Ledger - Obata , Gray -Wolf (68), Kowalski (80)).
- Y. Bahturin e M. Goze (2008) considerano la nozione di spazio Γ -simmetrico dal punto di vista algebrico.

- Il caso $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ coincide con la definizione di spazio simmetrico.
- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_k$, il grupo ciclico d'ordine k , coincide con *k-simmetrico*. (Kac, Ledger - Obata , Gray -Wolf (68), Kowalski (80)).
- Y. Bahturin e M. Goze (2008) considerano la nozione di spazio Γ -simmetrico dal punto di vista algebrico. Ogni automorfismo $\rho(\gamma)$ di G induce un automorfismo $\tau(\gamma)$ di $\mathfrak{g} \in \tilde{\Gamma}$. Il gruppo $\tilde{\Gamma} \subset Aut(\mathfrak{g})$ è abeliano, finito, $\tilde{\Gamma} \cong \Gamma$, e l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è *Γ -graduata*, cioè

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma$$

con

$$[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{\gamma'}] \subset \mathfrak{g}_{\gamma\gamma'} \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

- (B. G.) hanno dimostrato che, se G è connesso, la struttura di spazio Γ -simmetrico su G/H è completamente determinato dalla Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$.

- (B. G.) hanno dimostrato che, se G è connesso, la struttura di spazio Γ -simmetrico su G/H è completamente determinato dalla Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$.
- (B. G. Kollross) hanno classificano gli spazi Γ -simmetrici G/H quando G è un gruppo di Lie complesso semplice e $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

- (B. G.) hanno dimostrato che, se G è connesso, la struttura di spazio Γ -simmetrico su G/H è completamente determinato dalla Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$.
- (B. G. Kollross) hanno classificano gli spazi Γ -simmetrici G/H quando G è un gruppo di Lie complesso semplice e $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (Boujakoub, Goze e Remm) hanno classificato le varietà di bandiera che ammettono una tale struttura.

- (B. G.) hanno dimostrato che, se G è connesso, la struttura di spazio Γ -simmetrico su G/H è completamente determinato dalla Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$.
- (B. G. Kollross) hanno classificano gli spazi Γ -simmetrici G/H quando G è un gruppo di Lie complesso semplice e $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (Boujakoub, Goze e Remm) hanno classificato le varietà di bandiera che ammettono una tale struttura.

Se G è connesso, la classificazione degli spazi Γ -simmetrici è equivalente alla classificazione delle algebre di Lie Γ -graduate.

- (B. G.) hanno dimostrato che, se G è connesso, la struttura di spazio Γ -simmetrico su G/H è completamente determinato dalla Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$.
- (B. G. Kollross) hanno classificano gli spazi Γ -simmetrici G/H quando G è un gruppo di Lie complesso semplice e $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (Boujakoub, Goze e Remm) hanno classificato le varietà di bandiera che ammettono una tale struttura.

Se G è connesso, la classificazione degli spazi Γ -simmetrici è equivalente alla classificazione delle algebre di Lie Γ -graduate.

La classificazione delle algebre di Lie Γ -graduate è lontana da essere completa.

Si conoscono alcuni risultati riguardanti le algebre di Lie semplici.

Per le algebre di Lie risolubili e nilpotenti è un problema aperto.

Il gruppo di Heisenberg

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = (\mathbb{R}^3, ds_\lambda^2).$$

Le metriche, invarianti a sinistra, sono date da

$$ds_\lambda^2 = dx^2 + dy^2 + \lambda^2(dz - \lambda x dy)^2.$$

La base ortonormale invariante a sinistra è

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Sottogruppi abeliani finiti di $Aut(\mathfrak{h}_3)$

Se $\tau \in Aut(\mathfrak{h}_3)$, rispetto alla base $\{X_1, X_2, X_3\}$ si può porre

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \Delta \end{pmatrix} \quad \Delta = \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 \neq 0.$$

Sottogruppi abeliani finiti di $Aut(\mathfrak{h}_3)$

Se $\tau \in Aut(\mathfrak{h}_3)$, rispetto alla base $\{X_1, X_2, X_3\}$ si può porre

$$\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \Delta \end{pmatrix} \quad \Delta = \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 \neq 0.$$

Se $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ è abeliano e finitamente generato allora

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2^{k_2} \times \mathbb{Z}_3^{k_3} \times \cdots \times \mathbb{Z}_p^{k_p}.$$

Se Γ contiene una componente ciclica isomorfa a $\mathbb{Z}_k$, allora esiste un automorfismo $\tau \in \Gamma$ tale che

$$\tau^k = Id.$$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $\mathbb{Z}_2$

Proposizione

Gli automorfismi involutivi τ di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ hanno una delle espressioni matriciali seguenti

$$Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} & \alpha_6 & -1 \end{pmatrix}, \tau_2(\alpha_3, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & -1 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3(\alpha_1, \alpha_2 \neq 0, \alpha_6) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \frac{1 - \alpha_1^2}{\alpha_2} & -\alpha_1 & 0 \\ \frac{(1 + \alpha_1)\alpha_6}{\alpha_2} & \alpha_6 & -1 \end{pmatrix}, \tau_4(\alpha_5, \alpha_6) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_2)^k$

Teorema

I sottogruppi $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_2)^k$ sono uguali a uno dei seguenti:

• $k = 1$

- 1 $\Gamma_1(\alpha_3, \alpha_6) = \{Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6)\},$
- 2 $\Gamma_2(\alpha_3, \alpha_5) = \{Id, \tau_2(\alpha_3, \alpha_5)\},$
- 3 $\Gamma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6) = \{Id, \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6), \alpha_2 \neq 0\},$
- 4 $\Gamma_4(\alpha_5, \alpha_6) = \{Id, \tau_4(\alpha_5, \alpha_6)\}.$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_2)^k$

Teorema

I sottogruppi $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_2)^k$ sono uguali a uno dei seguenti:

• $k = 1$

- 1 $\Gamma_1(\alpha_3, \alpha_6) = \{Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6)\},$
- 2 $\Gamma_2(\alpha_3, \alpha_5) = \{Id, \tau_2(\alpha_3, \alpha_5)\},$
- 3 $\Gamma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6) = \{Id, \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6), \alpha_2 \neq 0\},$
- 4 $\Gamma_4(\alpha_5, \alpha_6) = \{Id, \tau_4(\alpha_5, \alpha_6)\}.$

• $k = 2$

- 1 $\Gamma_5(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6) = \{Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3\alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)\},$
- 2 $\Gamma_6(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6, \alpha'_6) =$
 $\left\{Id, \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6), \tau_3(-\alpha_1, -\alpha_2, \alpha'_6), \tau_4\left(\frac{\alpha'_6(1-\alpha_1)-\alpha_6(1+\alpha_1)}{\alpha_2}, -\alpha_6 - \alpha'_6\right)\right\}.$

Sia $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \in \Gamma$ risulta $([\tau, \tau'] = \tau \circ \tau' - \tau' \circ \tau)$

$$\begin{aligned} [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(\alpha'_3, \alpha'_5)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_3 = -\alpha_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3)] &\neq 0 && && \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_4(\alpha_5, \alpha'_6)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_6 = -\alpha_6 \end{aligned}$$

Sia $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \in \Gamma$ risulta $([\tau, \tau'] = \tau \circ \tau' - \tau' \circ \tau)$

$$\begin{aligned} [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(\alpha'_3, \alpha'_5)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_3 = -\alpha_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3)] &\neq 0 && && \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_4(\alpha_5, \alpha'_6)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_6 = -\alpha_6 \end{aligned}$$

Inoltre risulta

$$\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \circ \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5) = \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)$$

e

$$\left[\tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right) \right] = 0.$$

Sia $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \in \Gamma$ risulta $([\tau, \tau'] = \tau \circ \tau' - \tau' \circ \tau)$

$$\begin{aligned} [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(\alpha'_3, \alpha'_5)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_3 = -\alpha_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3)] &\neq 0 && && \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_4(\alpha_5, \alpha'_6)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_6 = -\alpha_6 \end{aligned}$$

Inoltre risulta

$$\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \circ \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5) = \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)$$

e

$$\left[\tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)\right] = 0.$$

$$\Gamma_5 = \left\{ Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right) \right\} \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$$

$$\Gamma_5 \cong \mathbb{Z}_2^2.$$

Sia $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \in \Gamma$ risulta $([\tau, \tau'] = \tau \circ \tau' - \tau' \circ \tau)$

$$\begin{aligned} [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(\alpha'_3, \alpha'_5)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_3 = -\alpha_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3)] &\neq 0 && && \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3 \\ [\tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_4(\alpha_5, \alpha'_6)] &= 0 && \text{se e solo se} && \alpha'_6 = -\alpha_6 \end{aligned}$$

Inoltre risulta

$$\tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \circ \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5) = \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)$$

e

$$\left[\tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right)\right] = 0.$$

$$\Gamma_5 = \left\{ Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3 \alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right) \right\} \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$$

$$\Gamma_5 \cong \mathbb{Z}_2^2.$$

L'unico sottogruppo di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ di tipo $(\mathbb{Z}_2)^k$, $k \geq 2$, contenente un automorfismo di tipo $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6)$ è Γ_5 .

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $\mathbb{Z}_3$

Sia $\tau \in Aut(\mathfrak{h}_3)$ t.c. $\tau^3 = Id$. Allora $4\alpha_2\alpha_3 \leq -3$

$$\tau_{5\pm} = \begin{pmatrix} \frac{-1 \mp \sqrt{-3 - 4\alpha_2\alpha_3}}{2} & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4\alpha_2\alpha_3}}{2} & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\tau_{5+}^2(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6) = \tau_{5-}(-\alpha_2, -\alpha_3, \alpha'_5, \alpha'_6)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha'_5 &= \frac{\alpha_5 - \sqrt{-3 - 4\alpha_2\alpha_3}\alpha_5 - 2\alpha_3\alpha_6}{2} \\ \alpha'_6 &= \frac{\alpha_6 + \sqrt{-3 - 4\alpha_2\alpha_3}\alpha_6 - 2\alpha_2\alpha_5}{2} \end{aligned}$$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_3)^{k_3}$

Proposizione

Ogni sottogruppo abeliano $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ è uguale a

$$\Gamma_7 = \{ Id, \tau_{5+}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \tau_{5-}(-\alpha_2, -\alpha_3, \alpha'_5, \alpha'_6), 4\alpha_2\alpha_3 \leq -3 \}.$$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_3)^{k_3}$

Proposizione

Ogni sottogruppo abeliano $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ è uguale a

$$\Gamma_7 = \{Id, \tau_{5+}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \tau_{5-}(-\alpha_2, -\alpha_3, \alpha'_5, \alpha'_6), 4\alpha_2\alpha_3 \leq -3\}.$$

L'ipotesi che

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}_3^{k_3} \quad k_3 \geq 2$$

implica

$$a_2 = 0$$

Sottogruppi di $Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfi a $(\mathbb{Z}_3)^{k_3}$

Proposizione

Ogni sottogruppo abeliano $\Gamma \subset Aut(\mathfrak{h}_3)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ è uguale a

$$\Gamma_7 = \{Id, \tau_{5+}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \tau_{5-}(-\alpha_2, -\alpha_3, \alpha'_5, \alpha'_6), 4\alpha_2\alpha_3 \leq -3\}.$$

L'ipotesi che

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}_3^{k_3} \quad k_3 \geq 2$$

implica

$$a_2 = 0 \quad (4a_2a_3 \leq -3)$$

Quindi

$$k_3 = 1.$$

Caso generale

Ogni sottogruppo abeliano $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_k$ coincide con

$$\Gamma_{6,k} = \left\{ Id, \tau_6(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \dots, \tau_6^{k-1}, \quad \alpha_2 \alpha_3 \leq -1 + \cos^2 \frac{2\pi}{k} \right\},$$

dove $\tau_6(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6)$ è l'automorfismo

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k} + \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{k} - 1 - \alpha_2 \alpha_3} & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \cos \frac{2\pi}{k} - \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{k} - 1 - \alpha_2 \alpha_3} & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso generale

Ogni sottogruppo abeliano $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$ isomorfo a $\mathbb{Z}_k$ coincide con

$$\Gamma_{6,k} = \left\{ \text{Id}, \tau_6(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6), \dots, \tau_6^{k-1}, \quad \alpha_2 \alpha_3 \leq -1 + \cos^2 \frac{2\pi}{k} \right\},$$

dove $\tau_6(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6)$ è l'automorfismo

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k} + \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{k} - 1 - \alpha_2 \alpha_3} & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \cos \frac{2\pi}{k} - \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{k} - 1 - \alpha_2 \alpha_3} & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

Sia $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$, abeliano e finito. Allora Γ è isomorfo a

- 1 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,
- 2 $\mathbb{Z}_2^{k_2} \times \mathbb{Z}_3^{k_3} \times \dots \times \mathbb{Z}_p^{k_p}$ con $k_i = 0$ o 1 per $i = 2, \dots, p$.

Γ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

Sia $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$, abeliano e finito.

Definizione

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}_3$ è Γ -graduata se

$$\mathfrak{h}_3 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{h}_{3,\gamma}$$

con

$$[\mathfrak{h}_{3,\gamma}, \mathfrak{h}_{3,\gamma'}] \subset \mathfrak{h}_{3,\gamma\gamma'} \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

Inoltre

$$\mathfrak{h}_{3,e} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_1 = \{0\}$$

dove e è l'elemento neutro di Γ , e V_1 l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Γ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

- $\mathfrak{h}_3$ non ammette una $\mathbb{Z}_2$ -graduazione.

Γ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

- $\mathfrak{h}_3$ non ammette una $\mathbb{Z}_2$ -graduazione. La graduazione di $\mathfrak{h}_3$ sarebbe del tipo

$$\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

con $\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$. In questo caso il corrispondente spazio simmetrico omogeneo sarebbe isomorfo a $\mathbb{H}_3/H$ dove H è un sottogruppo di Lie non banale di $\mathbb{H}_3$ la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}_0$.

Γ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

- $\mathfrak{h}_3$ non ammette una $\mathbb{Z}_2$ -graduazione. La graduazione di $\mathfrak{h}_3$ sarebbe del tipo

$$\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

con $\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$. In questo caso il corrispondente spazio simmetrico omogeneo sarebbe isomorfo a $\mathbb{H}_3/H$ dove H è un sottogruppo di Lie non banale di $\mathbb{H}_3$ la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}_0$.

- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_2^2$ allora $\Gamma = \Gamma_5$ o $\Gamma = \Gamma_6$.

Γ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

- $\mathfrak{h}_3$ non ammette una $\mathbb{Z}_2$ -graduazione. La graduazione di $\mathfrak{h}_3$ sarebbe del tipo

$$\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

con $\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$. In questo caso il corrispondente spazio simmetrico omogeneo sarebbe isomorfo a $\mathbb{H}_3/H$ dove H è un sottogruppo di Lie non banale di $\mathbb{H}_3$ la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}_0$.

- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_2^2$ allora $\Gamma = \Gamma_5$ o $\Gamma = \Gamma_6$.

$$\Gamma_5 = \left\{ Id, \tau_1(\alpha_3, \alpha_6), \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5), \tau_4\left(-\frac{\alpha_3\alpha_6}{2} - \alpha_5, -\alpha_6\right) \right\}$$

Gli autospazi associati a $\tau_1(\alpha_3, \alpha_6)$ sono rispetto alla base $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$V_1 = L\left((0, 1, \frac{\alpha_6}{2})\right) \quad V_{-1} = L\left((1, -\frac{\alpha_3}{2}, 0), (0, 0, 1)\right)$$

Quelli associati a $\tau_2(-\alpha_3, \alpha_5)$

$$W_1 = L\left((1, -\frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_5}{2})\right) \quad W_{-1} = L((0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Poiché $\tau_4 = \tau_1 \circ \tau_2$, la graduazione di $\mathfrak{h}_3$ associata a Γ_5 è

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_3 &= V_1 \cap W_1 \oplus V_1 \cap W_{-1} \oplus V_{-1} \cap W_1 \oplus V_{-1} \cap W_{-1} \\ &= \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 1, \frac{\alpha_6}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(1, -\frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_5}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Poiché $\tau_4 = \tau_1 \circ \tau_2$, la graduazione di $\mathfrak{h}_3$ associata a Γ_5 è

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_3 &= V_1 \cap W_1 \oplus V_1 \cap W_{-1} \oplus V_{-1} \cap W_1 \oplus V_{-1} \cap W_{-1} \\ &= \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 1, \frac{\alpha_6}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(1, -\frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_5}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Proposizione

La $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$ corrispondono a uno dei seguenti:

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(X_2 + \frac{\alpha_6}{2}X_3)\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 - \frac{\alpha_3}{2}X_2 + \frac{\alpha_5}{2}X_3)\} \oplus \mathbb{R}\{X_3\}$$

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_2}X_2)\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 - \frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}X_2)\} \oplus \mathbb{R}\{X_3\}$$

Poiché $\tau_4 = \tau_1 \circ \tau_2$, la graduazione di $\mathfrak{h}_3$ associata a Γ_5 è

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_3 &= V_1 \cap W_1 \oplus V_1 \cap W_{-1} \oplus V_{-1} \cap W_1 \oplus V_{-1} \cap W_{-1} \\ &= \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 1, \frac{\alpha_6}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(1, -\frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_5}{2})\} \oplus \mathbb{R}\{(0, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Proposizione

La $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$ corrispondono a uno dei seguenti:

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(X_2 + \frac{\alpha_6}{2}X_3)\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 - \frac{\alpha_3}{2}X_2 + \frac{\alpha_5}{2}X_3)\} \oplus \mathbb{R}\{X_3\}$$

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 + \frac{1-\alpha_1}{\alpha_2}X_2)\} \oplus \mathbb{R}\{(X_1 - \frac{1+\alpha_1}{\alpha_2}X_2)\} \oplus \mathbb{R}\{X_3\}$$

- Se $\Gamma = \mathbb{Z}_3$. Abbiamo la graduazione

$$\mathfrak{h}_{3,\mathbb{C}} = V_1 \oplus V_j \oplus V_{\bar{j}}$$

dove $(\lambda = \frac{1+2j+\sqrt{-3-4\alpha_2\alpha_3}}{2\alpha_2})$

$$V_1 = \mathbb{C}\{X_3\} \quad V_j = \mathbb{C}\{X_1 + \lambda X_2\} \quad V_{\bar{j}} = \mathbb{C}\{X_1 + \bar{\lambda} X_2\}$$

Classificazione delle $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazioni

Lemma

Esiste un automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$ tale che

$$\sigma^{-1}\Gamma_5\sigma = \Gamma_6$$

Dim. Se $\alpha_1^2 \neq 1$, allora

$$\sigma = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{\gamma\alpha_2}{\alpha_1 - 1} & 0 \\ \delta & -\frac{\alpha_2(\gamma\alpha_3 + \delta - \alpha_1\delta)}{-1 + \alpha_1^2} & 0 \\ \rho & \mu & -\frac{\gamma\alpha_2(\gamma\alpha_3 + 2\delta)}{-1 + \alpha_1^2} \end{pmatrix}$$

con

$$\rho = \rho(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \delta, \gamma) \quad \mu = \mu(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \delta, \gamma)$$

risponde alla domanda.

Classificazione delle $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazioni

Siano

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathfrak{h}_{3,a_1} \oplus \mathfrak{h}_{3,a_2} \oplus \mathfrak{h}_{3,a_3} = \{0\} \oplus \mathfrak{h}'_{3,a_1} \oplus \mathfrak{h}'_{3,a_2} \oplus \mathfrak{h}'_{3,a_3}$$

$\mathbb{Z}_2^2$ -graduazioni di $\mathfrak{h}_3$, $\{0, a_1, a_2, a_3\} \in \mathbb{Z}_2^2$. Allora $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$ tale che

$$\mathfrak{h}'_{3,a_i} = \sigma(\mathfrak{h}_{3,a_i}).$$

Le graduazioni sono equivalenti.

Lemma

Esiste $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{h}_3)$ tale che

$$\sigma^{-1} \tau_1(\alpha_3, \alpha_6) \sigma = \tau_1(0, 0), \quad \sigma^{-1} \tau_2(-\alpha_3, \alpha_5) \sigma = \tau_2(0, 0).$$

Dimostrazione **Se**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha_5}{2} & \frac{\alpha_6}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione

Ogni $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$ è equivalente alla graduazione definita da

$$\Gamma_5(0,0,0) = \{Id, \tau_1(0,0), \tau_2(0,0), \tau_4(0,0)\}.$$

Questa graduazione corrispondente a

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}(X_2) \oplus \mathbb{R}(X_2) \oplus \mathbb{R}(X_3).$$

Strutture riemanniane $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetriche

Siano G/H uno spazio omogeneo Γ -simmetrico e $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$ l'omomorfismo iniettivo di gruppi.

Strutture riemanniane $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetriche

Siano G/H uno spazio omogeneo Γ -simmetrico e $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$ l'omomorfismo iniettivo di gruppi.

Definizione

Lo spazio G/H è Γ -simmetrico riemanniano se esiste, su G/H , una metrica riemanniana g tale che

- 1 g è G -invariante,
- 2 le simmetrie $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ sono isometrie.

Strutture riemanniane $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetriche

Siano G/H uno spazio omogeneo Γ -simmetrico e $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(G)$ l'omomorfismo iniettivo di gruppi.

Definizione

Lo spazio G/H è Γ -simmetrico riemanniano se esiste, su G/H , una metrica riemanniana g tale che

- 1 g è G -invariante,
- 2 le simmetrie $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ sono isometrie.

(G.R.), tale metrica è completamente determinata da una forma bilineare B su $\mathfrak{g}$ t.c.

- 1 B è $\text{ad}\mathfrak{h}$ invariante ($\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_e$)
- 2 $B(\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{\gamma'}) = 0$ se $\gamma \neq \gamma' \neq e$
- 3 La restrizione di B a $\bigoplus_{\gamma \neq e} \mathfrak{g}_\gamma$ è definita positiva.

Una struttura $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica su $\mathbb{H}_3$ è determinata dalla $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}(X_1) \oplus \mathbb{R}(X_2) \oplus \mathbb{R}(X_3)$$

Una struttura $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica su $\mathbb{H}_3$ è determinata dalla $\mathbb{Z}_2^2$ -graduazione di $\mathfrak{h}_3$

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}(X_1) \oplus \mathbb{R}(X_2) \oplus \mathbb{R}(X_3)$$

Gli automorfismi di $\mathfrak{h}_3$ sono isometrie per le metriche invarianti a sinistra di $\mathbb{H}_3$, quindi

Teorema

Una struttura riemanniana $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica su $\mathbb{H}_3$ è isometrica alla struttura riemanniana associata alla graduazione

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R}(X_1) \oplus \mathbb{R}(X_2) \oplus \mathbb{R}(X_3)$$

e la metrica riemanniana è

$$g = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda^2 \omega_3^2$$

con $\lambda \neq 0$, e $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ è la base duale di $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Dimostrazione

Le componenti della graduazione sono ortogonali, la metrica riemanniana invariante a sinistra g , che coincide con la forma bilineare B verifica

$$g = \alpha_1 \omega_1^2 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_3^2$$

con $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$.

P.Pansu ha dimostrato che si possono scegliere $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

$$g = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda^2 \omega_3^2$$

questa metrica è naturalmente riduttiva per qualsiasi λ .

Definizione

Sia $M = G/H$ uno spazio omogeneo Γ -simmetrico e g una metrica di Lorentz su M . La metrica g è detta $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica Lorentziana se vale una delle due condizioni

- 1 Le componenti non banali $\mathfrak{g}_\gamma$ della Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$ sono ortogonali e non degeneri rispetto alla forma bilineare indotta B .*
- 2 Una componente non banale $\mathfrak{g}_{\lambda_0}$ è degenera, le altre sono ortogonali e non degeneri, e esiste un componente $\mathfrak{g}_{\lambda_1}$ tale che la restrizione di B a $\mathfrak{g}_{\lambda_0} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1}$ ha segnatura $(1, 1)$.*

Se $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{+-} + \mathfrak{g}_{-+} + \mathfrak{g}_{--}$ è l'algebra di Heisenberg

Definizione

Sia $M = G/H$ uno spazio omogeneo Γ -simmetrico e g una metrica di Lorentz su M . La metrica g è detta $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica Lorentziana se vale una delle due condizioni

- 1 Le componenti non banali $\mathfrak{g}_\gamma$ della Γ -graduazione di $\mathfrak{g}$ sono ortogonali e non degeneri rispetto alla forma bilineare indotta B .
- 2 Una componente non banale $\mathfrak{g}_{\lambda_0}$ è degenera, le altre sono ortogonali e non degeneri, e esiste un componente $\mathfrak{g}_{\lambda_1}$ tale che la restrizione di B a $\mathfrak{g}_{\lambda_0} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1}$ ha segnatura $(1, 1)$.

Se $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{+-} + \mathfrak{g}_{-+} + \mathfrak{g}_{--}$ è l'algebra di Heisenberg

$$\mathfrak{h}_3 = \{0\} \oplus \mathbb{R} \left(X_2 - \frac{\alpha_6}{2} X_3 \right) \oplus \mathbb{R} \left(X_1 - \frac{\alpha_3}{2} X_2 + \frac{\alpha_5}{2} X_3 \right) \oplus \mathbb{R} (X_3).$$

Poniamo

$$Y_1 = X_1 - \frac{\alpha_3}{2}X_2 + \frac{\alpha_5}{2}X_3 \quad Y_2 = X_2 - \frac{\alpha_6}{2}X_3 \quad Y_3 = X_3.$$

La base duale è

$$\vartheta_1 = \omega_1 \quad \vartheta_2 = \omega_2 + \frac{\alpha_3}{2}\omega_1 \quad \vartheta_3 = \omega_3 - \frac{\alpha_6}{2}\omega_2 - \left(\frac{\alpha_3\alpha_6}{4} + \frac{\alpha_5}{2}\right)\omega_1$$

dove $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ è la base duale di $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Caso I Le componenti g_{+-}, g_{-+}, g_{--} sono non degeneri.

$$g = \lambda_i v_i^2 =$$

Caso I Le componenti $\mathfrak{g}_{+-}, \mathfrak{g}_{-+}, \mathfrak{g}_{--}$ sono non degeneri.

$$g = \lambda_i v_i^2 = \lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \left(\omega_2 + \frac{\alpha_3}{2} \omega_1 \right)^2 + \lambda_3 \left(\omega_3 - \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 - \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right)^2$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

Caso I Le componenti g_{+-}, g_{-+}, g_{--} sono non degeneri.

$$g = \lambda_i \vartheta_i^2 = \lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \left(\omega_2 + \frac{\alpha_3}{2} \omega_1 \right)^2 + \lambda_3 \left(\omega_3 - \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 - \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right)^2$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Il cambiamento della base associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \frac{\alpha_3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_5}{2} - \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} & -\frac{\alpha_6}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

è un automorfismo. Allora

$$g = \lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2 + \lambda_3 \omega_3^2.$$

Proposizione

Ogni metrica Lorentziana $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetrica g su $\mathbb{H}_3$ tale che le componenti della graduazione di $\mathfrak{h}_3$ sono non degeneri, si riduce a una delle due forme

$$\begin{cases} g = -\omega_1^2 + \omega_2^2 + \lambda^2 \omega_3^2 \\ g = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 \omega_3^2 \end{cases}$$

Caso II Le componenti $\mathfrak{g}_{+-}, \mathfrak{g}_{-+}$ sono degeneri mediante automorfismi ci riduciamo al caso precedente.

Caso II Le componenti $\mathfrak{g}_{+-}, \mathfrak{g}_{-+}$ sono degeneri mediante automorfismi ci riduciamo al caso precedente. Se è degenera la componente $\mathfrak{g}_{--}$.

Caso II Le componenti g_{+-}, g_{-+} sono degeneri mediante automorfismi ci riduciamo al caso precedente. Se è degenera la componente g_{--} .

$$g = \omega_1^2 + \left[\omega_3 - \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 - \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right]^2 - \left[\omega_2 - \omega_3 + \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 + \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right]^2.$$

Caso II Le componenti g_{+-}, g_{-+} sono degeneri mediante automorfismi ci riduciamo al caso precedente. Se è degenera la componente g_{--} .

$$g = \omega_1^2 + \left[\omega_3 - \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 - \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right]^2 - \left[\omega_2 - \omega_3 + \frac{\alpha_6}{2} \omega_2 + \left(\frac{\alpha_5}{2} + \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} \right) \omega_1 \right]^2.$$

Il cambiamento della base associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_5}{2} - \frac{\alpha_3 \alpha_6}{4} & -\frac{\alpha_6}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

è un automorfismo. Allora

Proposizione

Le metriche Lorentziane $\mathbb{Z}_2^2$ -simmetriche g su $\mathbb{H}_3$ tale che g_{--} è degenera, si riduce a

$$g = \omega_1^2 + \omega_3^2 - (\omega_2 - \omega_3)^2.$$

L'unica metrica di Lorentz, invariante a sinistra piatta su $\mathbb{H}_3$.