Metriche di coomogeneità uno con olonomia SU(3)

Diego Conti

Università di Milano Bicocca

L'Aquila, 8 Settembre 2011

- D. Conti. SU(3)-holonomy metrics from nilpotent Lie groups, arXiv:1108.2450
- D. Conti, S. Salamon. Generalized Killing spinors in dimension 5, Trans. Amer. Math. Soc (2007)

Metriche di coomogeneità uno

- G gruppo di Lie
- (M, g) varietà Riemanniana
- Azione $G \circlearrowleft M$ che preserva la metrica

Nell'intorno di un'orbita G/H

$$M =_{loc} G \times_H V$$

dove $H \to \mathrm{O}(V)$ rappresentazione di isotropia normale

- Coomogeneità uno se le orbite principali hanno codimensione uno; allora

$$M =_{loc} G/H \times (a, b), \quad M =_{loc} G \times_H V.$$

Problema

Costruire metriche esplicite invarianti con olonomia $\mathrm{SU}(3)$ su M^6 come sopra.

$\mathrm{SU}(3)$-strutture

- (M^6, g)
- $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Hol}(\nabla^{LC}) \subseteq \mathrm{SU}(3)$
- $F \xrightarrow{\mathrm{GL}(6,\mathbb{R})} M$ fibrato dei frame

Trasporto parallelo $\Rightarrow$ $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{SU}(3)"'] & F \arrow[d, "\mathrm{GL}(6,\mathbb{R})"] \\ & M \end{tikzcd}$$

$\mathrm{SU}(3)$ fissa tre forme $\omega, \psi^+, \psi^- \in \Lambda(T_xM)$

$$\omega = e^{12} + e^{34} + e^{56} \quad \text{forma di Kähler}$$
$$\psi^+ + i\psi^- = (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) \wedge (e^5 + ie^6) \quad \text{volume complesso}$$

- $\mathrm{Hol}^0(g) \subseteq \mathrm{SU}(3) \iff$ Kähler Ricci-flat

Teorema (dell'orbita)

Se M^6 di coomogeneità uno per azione di G gruppo di Lie nilpotente di dimensione 5, con $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile invariante, allora tutte le orbite hanno dimensione 5.

Schema di dimostrazione.

(A) Classificare orbite principali

(B) Estendere a metriche su $G \times (a, b)$

(C) Dimostrare che non si estende a $G \times_K V$

Teorema (dell'orbita)

Se M^6 di coomogeneità uno per azione di G gruppo di Lie nilpotente di dimensione 5, con $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile invariante, allora tutte le orbite hanno dimensione 5.

Schema di dimostrazione.

(A) Classificare orbite principali

(B) Estendere a metriche su $G \times (a, b)$

(C) Dimostrare che non si estende a $G \times_K V$

Corollario

Se M^6 è di coomogeneità uno per l'azione di un gruppo di Lie nilpotente di dimensione 5 con una $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile invariante completa, allora è piatta.

5-varietà hypo

- $P \to M^6$ $\mathrm{SU}(3)$-struttura $\Rightarrow \omega, \psi^\pm \in \Omega(M^6)$
- $\iota\colon \tilde{M}^5 \to M^6$ ipersuperficie orientata

$$\boxed{\mathrm{SU}(3) \cap \mathrm{SO}(5) = \mathrm{SU}(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{SU}(2)"'] & P \arrow[d, "\mathrm{SU}(3)"] \\
\tilde{M}^5 \arrow[r, "\iota"] & M^6
\end{tikzcd}$$

- $\tilde{P}$ è $\mathrm{SU}(2)$-struttura su $\tilde{M}^5$
- $\tilde{P} \iff (\omega_1, \psi_2, \psi_3)$,

$$\omega_1 = e^{12} + e^{34} \qquad \psi_2 = e^{135} + e^{425} \qquad \psi_3 = e^{145} + e^{235}$$

- $\tilde{P}$ è hypo se ω_1, ψ_2, ψ_3 sono chiuse.

Teorema (C.-Salamon 2007)

Un'ipersuperficie in (M^6, P) *integrabile ha struttura hypo indotta. Viceversa ogni varietà hypo* $(M^5, \omega_1, \psi_2, \psi_3)$ *analitica reale si immerge isometricamente in* M^6 *con* $\mathrm{SU}(3)$*-struttura integrabile compatibile.*

Teorema (C.-Salamon 2007)

Un'ipersuperficie in (M^6, P) integrabile ha struttura hypo indotta. Viceversa ogni varietà hypo $(M^5, \omega_1, \psi_2, \psi_3)$ analitica reale si immerge isometricamente in M^6 con $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile compatibile.

Esplicitamente (localmente)

- $M^6 = M^5 \times (a, b)$,
- $(\omega_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ famiglia a un parametro di $\mathrm{SU}(2)$-strutture su $M^5 = M^5 \times \{t\}$
- $\begin{cases} \omega = \omega_1(t) + *(\omega_1(t)^2/2) \wedge dt \\ \psi^+ + i\psi^- = (*\psi_2(t) + *\psi_3(t)) \wedge (*(\omega_1(t)^2/2) + idt) \end{cases}$

$$(\omega, \psi^{\pm})\ \mathrm{SU}(3)\text{-struttura integrabile}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1'(t) = d * (\omega_1(t)^2/2) \\ \psi_2'(t) = -d * \psi_3(t) \\ \psi_3'(t) = d * \psi_2(t) \end{cases} \qquad \text{equazioni di evoluzione}$$

Trasformazioni gauge

- $P \to M^5$ $\mathrm{SU}(2)$-struttura
- $\tau\colon P \to (\mathbb{R}^5)^* \otimes \frac{\mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)}$ torsione intrinseca

Proposizione (C.-Salamon 2007)

1. *P hypo* $\iff \tau \in \mathsf{Sym}(\mathbb{R}^5) \subset (\mathbb{R}^5)^* \otimes \frac{\mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)}$
2. *Se P struttura hypo indotta su ipersuperficie in Calabi-Yau, $\tau = \mathrm{II}$.*

Trasformazioni gauge

- $P \to M^5$ $\mathrm{SU}(2)$-struttura
- $\tau \colon P \to (\mathbb{R}^5)^* \otimes \frac{\mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)}$ torsione intrinseca

Proposizione (C.-Salamon 2007)

1. *P hypo* $\iff \tau \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^5) \subset (\mathbb{R}^5)^* \otimes \frac{\mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)}$
2. *Se P struttura hypo indotta su ipersuperficie in Calabi-Yau, $\tau = \mathrm{II}$.*

Teorema

1. $\tau \Rightarrow Q_P \colon F \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$.
2. *$P_t \to M$ famiglia a un parametro di $\mathrm{SU}(2)$-strutture soddisfa le equazioni di evoluzione sse*

$$P_t = \{us_t(u) \mid u \in P_0\},$$

dove

$$s_t \colon F \to \mathrm{GL}(5, \mathbb{R}), \quad s_0 \equiv \mathrm{Id}, \quad s_t' s_t^{-1} = -Q_{P_t}.$$

Dimostrazione del teorema dell'orbita

- G gruppo di Lie di dimensione 5
- $P \to M^6$ $\mathrm{SU}(3)$-struttura integrabile
- $G \circlearrowleft M$ con coomogeneità uno preservando P

Allora

1. Posso supporre $M =_{loc} G \times (a, b)$
2. famiglia a un parametro P_t di $\mathrm{SU}(2)$-strutture hypo su G invarianti a sx
3. P_t soddisfa equazioni di evoluzione (ODE!)

Problema

(A) *Classificare strutture hypo invarianti su G*

(B) *Risolvere equazioni di evoluzione*

(C) *(non) estendere a orbite speciali*

(A) Classificare strutture hypo invarianti

- $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di dimensione 5
- $d_{\mathfrak{g}} \colon \Lambda(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda(\mathfrak{g}^*)$ operatore di Chevalley-Eilenberg
- $u \colon (\mathbb{R}^5)^* \to \mathfrak{g}^*$ coframe, $u = (e^1, \dots, e^5)$
- $u \Rightarrow P$ $\mathrm{SU}(2)$-struttura invariante su G
- P hypo $\iff$
  $d_{\mathfrak{g}}(e^{12} + e^{34}) = 0 = d_{\mathfrak{g}}(e^{135} + e^{425}) = d_{\mathfrak{g}}(e^{145} + e^{235})$
- $d(\mathfrak{g}, u) := u^{-1} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ u$ operatore differenziale su $\Lambda(\mathbb{R}^5)^*$
  $(d \circ d = 0)$

(A) Classificare strutture hypo invarianti

- $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di dimensione 5
- $d_{\mathfrak{g}}\colon \Lambda(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda(\mathfrak{g}^*)$ operatore di Chevalley-Eilenberg
- $u\colon (\mathbb{R}^5)^* \to \mathfrak{g}^*$ coframe, $u = (e^1, \dots, e^5)$
- $u \Rightarrow P$ $\mathrm{SU}(2)$-struttura invariante su G
- P hypo $\iff$
  $d_{\mathfrak{g}}(e^{12} + e^{34}) = 0 = d_{\mathfrak{g}}(e^{135} + e^{425}) = d_{\mathfrak{g}}(e^{145} + e^{235})$
- $d(\mathfrak{g}, u) := u^{-1} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ u$ operatore differenziale su $\Lambda(\mathbb{R}^5)^*$ $(d \circ d = 0)$

$$\boxed{\mathcal{D} := \{d\colon \Lambda(\mathbb{R}^5)^* \to \Lambda(\mathbb{R}^5)^* \mid d \circ d = 0\} = \{(\mathfrak{g}, u)\}/_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}}$$

- $\mathrm{GL}(5, \mathbb{R}) \circlearrowleft \mathbb{R}^5 \Rightarrow \mathrm{GL}(5, \mathbb{R}) \circlearrowleft \mathcal{D}$.
- $\mathcal{D}/_{\mathrm{GL}(5,\mathbb{R})} = \{$algebre di Lie di dimensione 5$\}$
- $(\mathrm{GL}(5,\mathbb{R})d)/_{\mathrm{SU}(2)} = \{\mathrm{SU}(2)\text{-strutture su } \mathfrak{g}\}/_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}$

Fissato $d \in \mathcal{D}$,

$$\{gd \mid g \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R}), gd \text{ soddisfa } (*)\}/_{\mathrm{SU}(2)}$$

$$=$$

$$\{\mathrm{SU}(2)\text{-strutture hypo su } \mathfrak{g}\}/_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}$$

Fissato $d \in \mathcal{D}$,

$$\{gd \mid g \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R}), gd \text{ soddisfa } (*)\}/_{\mathrm{SU}(2)}$$
$$=$$
$$\{\mathrm{SU}(2)\text{-strutture hypo su } \mathfrak{g}\}/_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})}$$

$$H_d := \{gd \mid g \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R}), gd \text{ soddisfa } (*)\}/_{\mathrm{U}(2)}$$
$$=$$
$$\{\mathrm{SU}(2)\text{-strutture hypo su } \mathfrak{g}\}/_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \times S^1}$$

Esempio: gruppo di Heisenberg

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}^* = \mathrm{Span}\{dt, dx, du, dy, dz - xdt - ydu\}$$

$$\text{Sia } u = (dt, dx, du, dy, dz - xdt - ydu) = (e^1, \dots, e^5);$$

$$\text{allora } d(\mathfrak{g}, u) = (0, 0, 0, 0, e^{12} + e^{34}) \in \mathcal{D},$$

$$\text{cioè } d_{\mathfrak{g}} e^1 = 0 = \ldots = d_{\mathfrak{g}} e^4, \quad d_{\mathfrak{g}} e^5 = e^{12} + e^{34}.$$

Esempio: gruppo di Heisenberg

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g}^* = \mathrm{Span}\{dt, dx, du, dy, dz - xdt - ydu\}$$

$$\text{Sia } u = (dt, dx, du, dy, dz - xdt - ydu) = (e^1, \dots, e^5);$$

$$\text{allora } d(\mathfrak{g}, u) = (0, 0, 0, 0, e^{12} + e^{34}) \in \mathcal{D},$$

$$\text{cioè } d_{\mathfrak{g}} e^1 = 0 = \dots = d_{\mathfrak{g}} e^4, \quad d_{\mathfrak{g}} e^5 = e^{12} + e^{34}.$$

Proposizione

$H_d = \{(0, 0, 0, 0, (\lambda + \mu)e^{12} + (\lambda - \mu)e^{34}) \mid \lambda \neq \pm\mu\}/\mathrm{U}(2)$

- Per $\lambda = \pm\mu$ si trovano algebre nell'orbita di

$$(0, 0, 0, 0, 12)$$

Classificazione

- 9 classi di isomorfismo di algebre di Lie nilpotenti di dimensione 5 [Magnin 1986]
- Quelle che non ammettono una struttura hypo sono

$$(0,0,e^{12},e^{13},e^{14}+e^{23}),(0,0,e^{12},e^{13},e^{23}),(0,0,0,e^{12},e^{14})$$

  [C.-Salamon 2007]
- Le famiglie in $\mathcal{D}$

  $\mathcal{M}_1$: $\big(\lambda e^{35}, he^{35}+ke^{15}, 0, (-\lambda e^2+he^1+\mu e^3)\wedge e^5, 0\big)$

  $\mathcal{M}_2$: $$\Big(0, xe^{34}+\lambda e^{35}, 0, x(e^{14}-e^{23})-ye^{34}+\lambda e^{15}-\mu e^{35},$$
  $$-h(e^{14}-e^{23})+ke^{34}-xe^{15}+ye^{35}\Big),\quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x & y & \lambda & \mu \\ h & k & x & y\end{pmatrix}<2.$$

  $\mathcal{M}_3$: $\big(0,0,0,0,(\lambda+\mu)e^{12}+(\lambda-\mu)e^{34}\big)$

  corrispondono a strutture hypo

Teorema

Le $\mathrm{U}(2)$-orbite in $\mathcal{D}$ indotte da strutture hypo su algebre di Lie nilpotenti non banali sono le orbite che intersecano $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ o $\mathcal{M}_3$. Le $\mathrm{GL}(5,\mathbb{R})$-orbite corrispondenti formano un diagramma

$$\begin{tikzcd}
(0,0,0,12,13+24) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & (0,0,0,0,12+34) \arrow[r] & (0,0,0,0,12) \\
(0,0,12,13,14) \arrow[r, two heads] \arrow[urr, bend right] & (0,0,0,12,13) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} ,$$

dove

- $d_1 \longrightarrow d_2$ *se* $\overline{(\mathrm{GL}(5,\mathbb{R})} \ni d_2$
- $d_1 \twoheadrightarrow d_2$ *se* $\overline{H_{d_1}} \supset H_{d_2}$.

(B) Risolvere equazioni di evoluzione

- $(\mathfrak{g}, u)$ hypo $\Rightarrow \mathrm{SU}(2)$-struttura P
- $\Rightarrow Q_P((u^t)^{-1}) \in \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$, $d(\mathfrak{g}, u) \in \mathcal{D}$
- $\Rightarrow$ mappa

$$\hat{X} \colon \mathcal{D} \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}), \quad d(\mathfrak{g}, u) \to Q_P((u^t)^{-1})$$

- $\Rightarrow$ campo di vettori

$$X \in \mathfrak{X}(\mathcal{D}), \quad X_d = \hat{X}(d) \cdot d$$

Proposizione

$\hat{X}$ è lineare e $\mathrm{U}(2)$-equivariante. Le soluzioni delle equazioni di evoluzione hypo si sollevano a soluzioni $(\mathfrak{g}, u(t))$ di

$$u'(t) = u(t) \circ \hat{X}_{d(t)}$$

dove $d(t)$ curva integrale di X.

classificare curve integrali di X

$\simeq$

classificare le metriche

Teorema

Le curve integrali di X in $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ sono sottoinsiemi semi-algebrici di $\mathcal{D}$ con al più un punto limite, cioè $d_{0,0,0,0} = 0$. Non ci sono curve integrali periodiche. A meno di simmetrie discrete (esplicite), le curve integrali sono date da:

$\mathcal{M}_1$: curve integrali non banali

- $\{h = 0 = k = \lambda, \mu > 0\}$
- $\{\mu = k > 0, h = 0 = \lambda\}$
- $\left\{h = 0, \lambda = 0, \frac{(\mu-k)^4}{\mu^3 k^3} = A, \mu > k, \epsilon k > 0\right\}, A > 0, \epsilon = \pm 1$
- $\left\{h = 0, \lambda = 0, \frac{(\mu-k)^4}{\mu^3 k^3} = A, \mu > k, \right\}, A < 0$
- $\left\{k = 0, \frac{(\mu^2+4(h^2+\lambda^2))^2}{(h^2+\lambda^2)^3} = A, h, \lambda \geq 0, [h : \lambda] \equiv P\right\}, A > 0, P \in \mathbb{RP}^1$
- $\left\{h = 0, \frac{(\lambda^2+3k^2+Bk^2\lambda)^3}{k^4\lambda^4} = A, \mu = \frac{1}{3k}(-2\lambda^2 + 3k^2 + Bk^2\lambda), k, \lambda > 0\right\}$
- $\left\{\lambda = 0, \mu = \frac{Ah^4}{k^5} + \frac{h^2}{k}, Bh^3k^2 + h^2k^4 - Ah^4 + k^4 = 0, h, k > 0\right\}$, $(A, B) \neq (0, 0)$
- componenti connesse di $\left\{B\lambda(3h^2 + \lambda^2 + Ah\lambda)^2 - 3h^3(C\lambda - B)^2 = 0, \mu = \frac{h^2-\lambda^2-\frac{1}{3}Ah\lambda}{k},\right.$ $\left.k^4 = \frac{Bh^3}{3\lambda}\right\}$, con $B, C > 0$.

$\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$: curve integrali non banali

2. $\big(0, xe^{34} + \lambda e^{35}, 0, x(e^{14} - e^{23}) - ye^{34} + \lambda e^{15} - \mu e^{35},$
   $-h(e^{14} - e^{23}) + ke^{34} - xe^{15} + ye^{35}\big)$
   - $\Big\{(x, h, \lambda), (y, k, \mu) \in I, (h + \lambda)^3 = A((\mu + k)^2 + 4(h + \lambda)^2),$
     $x, y, h, \lambda, k, \mu > 0\Big\}, A > 0, I = [I_0 : I_1 : I_2], I_0^2 = I_1 I_2$
   - $\Big\{x = 0 = h = \lambda, (y, k, \mu) \in I, y, k, \mu \geq 0, (k, \mu) \neq (0, 0)\Big\}$
3. $\big(0, 0, 0, 0, (\lambda + \mu)e^{12} + (\lambda - \mu)e^{34}\big)$
   - $\{\mu = 0, \lambda > 0\}$
   - $\big\{(\lambda^2 - \mu^2)^3 = A\mu^4, \lambda, \mu > 0\big\}, A \geq 0$
   - $\big\{(\lambda^2 - \mu^2)^3 = A\mu^4, \mu > 0\big\}, A < 0$

(C) (non) estendere a orbite speciali

Supponiamo che la metrica su $G \times (a, b)$ si estenda a $G \times_H V$, $\dim H > 0$.

1. $G \times_H V$ ha metrica invariante $\implies$ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ha metrica H-invariante $\implies$ condizioni su H
2. $\lim_{t \to b} g_5(t)$ finito e non degenere su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ $\implies$ se $W \subseteq \mathbb{R}^5$ sottospazio invariante per $\hat{X}_{d(t)}$, allora

$$\int_{t_0}^{b} \mathrm{tr}((\hat{X}_{d(t)})|_W = -\infty, \quad \mathfrak{h} \subset W; \quad \text{o}$$

$$\left| \int_{t_0}^{b} \mathrm{tr}((\hat{X}_{d(t)})|_W \right| < +\infty, \quad \mathfrak{h} \not\subset W.$$

Il teorema dell'orbita segue. $\square$

(C) (non) estendere a orbite speciali

Supponiamo che la metrica su $G \times (a, b)$ si estenda a $G \times_H V$, $\dim H > 0$.

1. $G \times_H V$ ha metrica invariante $\implies$ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ha metrica H-invariante $\implies$ condizioni su H
2. $\lim_{t \to b} g_5(t)$ finito e non degenere su $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ $\implies$ se $W \subseteq \mathbb{R}^5$ sottospazio invariante per $\hat{X}_{d(t)}$, allora

$$\int_{t_0}^{b} \operatorname{tr}((\hat{X}_{d(t)})|_W = -\infty, \quad \mathfrak{h} \subset W; \quad \text{o}$$

$$\left| \int_{t_0}^{b} \operatorname{tr}((\hat{X}_{d(t)})|_W \right| < +\infty, \quad \mathfrak{h} \not\subset W.$$

Il teorema dell'orbita segue. $\square$

Osservazione

Se la metrica si estende a $G \times_H V$ *con* $\dim H = 0$, *allora* $V = \mathbb{R}$ *e:*

- $H \circlearrowleft \mathbb{R}$ *in modo banale, e allora* $G \times_H \mathbb{R} = G/H \times \mathbb{R}$; *oppure*
- $H \circlearrowleft \mathbb{R}$ *in modo non banale, e allora l'evoluzione è costante e la metrica è piatta.*