Costruzioni esplicite di metriche almost Kähler (Einstein)

SIMON G. CHIOSSI
simon.chiossi@polito.it

POLITECNICO DI TORINO

New trends in differential geometry
7–9.IX.11

in collaborazione con Paul-Andi Nagy (Greifswald, D)

Indice

- scenario
- classificazione AK con curvatura “piccola” in dimensione 4
  (cf. *Systems of symplectic forms on four-manifolds*, `arXive:1102.1995`)
- esempi AKE in dimensione qualsiasi
  (cf. *Complex homothetic foliations on Kähler manifolds*, `arXive:1008.4954`)

strutture AK

Definizione

Una varietà quasi Hermitiana (liscia, connessa, orientata) (M^{2n}, g, I, ω_I) è almost Kähler (AK) se

$$d\omega_I = 0$$

Implicito in queste slides: I non integrabile/Kähler: $(\nabla_X \omega_I)_{ij} = \frac{1}{2}\langle IX, N_{ij}\rangle \neq 0$

1^o esempio: varietà di Kodaira–Thurston $Nil^3 \times S^1$ **Kodaira 64**

PROBLEMA: generale scarsità di esempi

La torsione intrinseca $\eta = \frac{1}{2}(\nabla I)I \in \Lambda^1 \otimes \Lambda^{\{2,0\}}$ è la '*app*' più efficace per studiare queste varietà (tipo Gray–Hervella 2)

AK vs. curvatura

Tra le metriche ω_I-compatibili, g AK è critica per il funzionale di Hilbert $g \mapsto \int_M scal_g$

$\Longleftrightarrow$ I è critica per l'energia $E(I) = \int_M |\nabla I|^2$ **Wood 95**

$\Longleftrightarrow$ $Ric(X, Y) = Ric(IX, IY)$ Ric è I-invariante (ie $Ric \in \Lambda^{1,1}$)

(PDE complicata che non soddisfa il test di Cartan)

PROBLEMA: difficoltà di soluzione - anche locale - delle equazioni

Idea fondamentale: **Armstrong**

L'esistenza di metriche **AK** *è intimamente legata a condizioni di* **curvatura**

AK Einstein (AKE)

Congettura di Goldberg: **Goldberg 69**

$\nexists$ metriche AKE su M compatta simplettica

Vera in svariati casi, ad es. se

- $scal \geqslant 0$ **Sekigawa 87**
- Anti-Self-Duale Einstein
- M spazio simmetrico compatto

Mentre: M sp. simm. non compatto Hermitiano irrid. (Kähler) $\Longrightarrow \exists$ AK

Esempi rilevanti

1^o esempio AK *Ricci-piatto* in dim 4 **Nurowski-Przanowski 99**

metriche AKE *complete* in dim $\geqslant 6$ **Apostolov-Drăghici-Moroianu 01**

Ostruzioni all'esistenza:

- locali (non ben capite)
- topologiche

Definizione

(M^4, g, ω_I) è **AK$_3$** (= soddisfa la 3ª condizione di curvatura di Gray) se AK e la 2-forma di curvatura di Riemann rispetta la decomposizione $\Lambda^2 = \Lambda_I^{1,1} \oplus \Lambda_I^{\{2,0\}}$ **Gray 76**
ie

$$R(X, Y, Z, U) = R(IX, IY, IZ, IU).$$

Equivalentemente

$$\mathbf{AK_3} \iff AK + \begin{cases} Ric \in \Lambda^{1,1} \\ W(\omega_I) = \frac{\kappa}{6}\omega_I \end{cases}$$

W è l'endomorfismo di Weyl, κ la curvatura scalare conforme

Interessanti dal pdv locale, dato che: compatta AK$_3$ $\Longrightarrow$ Kähler

Le 4-varietà AK$_3$ Einstein sono classificate **Armstrong 02**

Curvatura “piccola”

Su (M^{2n}, g, ω_I) quasi Hermitiana, la connessione

$$\overline{\nabla} = \nabla^{\text{Levi-Civita}} + \eta = \nabla^{\text{Levi-Civita}} + \frac{1}{2}(\nabla I)I$$

è metrica, Hermitiana, con torsione ($T_{ij} = \eta_{ij} - \eta_{ji}$), e si dice 2ª conn. Hermitiana canonica ($\equiv \nabla^{\text{Chern}}$ se M complessa)

cf. **Gauduchon 97**

Mi interessa il caso in cui l'algebra di olonomia di $\overline{\nabla}$

$$\overline{\mathfrak{hol}} \subset \mathfrak{u}(n) = \Lambda_0^{1,1}$$

abbia dimensione al più uno:

Teorema

Se (M^4, g, ω_I) quasi Hermitiana ha $\dim \overline{\mathfrak{hol}} \leqslant 1$, allora

1. (g, ω_I) Kähler piatta, oppure
2. g Ricci-piatta e self-duale, oppure
3. $\exists\, J$ Kähler con orientazione opposta ($\omega_J^2 = -\omega_I^2$)

Esempi AK in dimensione 4

Escludendo il caso SD Ricci-piatto (caso 2 precedente)

Teorema di struttura

Ogni (M^4, g, ω_I) AK con $\dim \overline{\mathfrak{hol}} = 1$ è localmente della forma

$$M^4 = \mathbb{C} \times \Sigma$$

$$\begin{aligned} g &= \tfrac{4}{1-|w|^2}(dz - w d\overline{z}) \odot (d\overline{z} - \overline{w} dz) + g_\Sigma \\ \omega_I &= +\tfrac{i}{2} dz \wedge d\overline{z} + \omega_\Sigma && \textit{(AK)} \\ \omega_J &= -\tfrac{i}{2} dz \wedge d\overline{z} + \omega_\Sigma && \textit{(Kähler)} \end{aligned}$$

ove

z è la coordinata di $\mathbb{C}$,

$(\Sigma, g_\Sigma, \omega_\Sigma)$ è una superficie di Riemann,

$w : \Sigma \to \mathbb{D} = \{|z| \leqslant 1\}$ è olomorfa tale che $\frac{g_\Sigma}{(1-|w|^2)^\alpha}$ sia piatta (per un $\alpha \in \mathbb{Q}$ opportuno)

Deformando Calabi

Dato qls fibrato Hermitiano in rette $L \to (\Sigma, g_\Sigma)$ su una superficie di Riemann, esiste (g_0, J_0) Kähler su $TL^\times = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ **Calabi 82**

➤ Cambiando l'orientazione delle fibre $\mathcal{V}$, $\exists$ OCS I_0

($\sim$ twistor space, cf. **Eells-Salamon 86**)

Sia $w : \Sigma \to \mathbb{D}$ olomorfa, e $T \in End\ TL^\times$ dato da

$$T_{|\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} Re\,w & Im\,w \\ Im\,w & -Re\,w \end{pmatrix}, \qquad T_{|\mathcal{H}} = 0.$$

➤ Definisco una deformazione di (g_0, J_0, I_0):

$$J_w = (1-T)J_0(1-T)^{-1}$$
$$I_w = (1-T)I_0(1-T)^{-1}$$
$$g_w(\cdot,\cdot) = g_0\big((1+T)(1-T)^{-1}\cdot,\cdot\big)$$

Notare che $\omega_{J_w} = \omega_{J_0}$, $\omega_{I_w} = \omega_{I_0}$

Ricetta

Siano $(\mathbb{R}^2, g_0, J_0)$ la struttura piatta standard e (Z, h_0, I_0) Kähler.
Deformo il prodotto con $w : Z \to \mathbb{D}$ olomorfa (non loc. costante):

Proposizione

1. $(M = \mathbb{R}^2 \times Z, g = (g_0 + h_0)_w)$ è localmente irriducibile
2. $J = (J_0 + I_0)_w$ è Kähler, $I = (-J_0 + I_0)_w$ è AK_3

NB: g Einstein $\iff$ Ansatz di Gibbons-Hawking

Punto chiave per l'iterazione:

Se (Z, g_Z, I_Z) Kähler ha forma di Ricci $\frac{1}{2}(dI_0 d) ln(1 - |w|^2)$ per una certa $w : Z \to \mathbb{D}$ olomorfa,

$\implies$ la construzione di Calabi deformata (Z', g', I') ha Ricci dello stesso tipo, dopo aver sollevato w a $Z' \to \mathbb{D}$.

Esempi AKE in dimensione $2m$

Sia $(\Sigma, g_\Sigma, I_\Sigma)$ una superficie di Riemann, $w : \Sigma \to \mathbb{D}$ olomorfa non costante:

famiglia I

Se $(1 - |w|^2)^{-1} g_\Sigma$ è piatta, iterando opportunamente la costruzione $m - 1$ volte si perviene a (M^{2m}, g, J, I) Kähler e AK_3, su cui un toro T^{m-1} agisce per isometrie olomorfe locali.

famiglia II

Sia $(1 - |w|^2)^{-m} g_\Sigma$ piatta. Iterando la costruzione deformata, ogni passo (Z_k, g_k, I_k) ha forma di Ricci

$$\tfrac{m-k}{2}(dI_k d) ln(1 - |w|^2).$$

Quindi (Z_k, g_k, I_k) è AK_3 e possiede k Killing olomorfi locali che commutano.
Inoltre (Z_m, g_m, I_m) is Ricci-piatta (AKE).

Alcune referenze

S.G.Chiossi, P.-A. Nagy, *Complex homothetic foliations on Kähler manifolds* `arXive:1008.4954` (BLMS)

S.G.Chiossi, P.-A. Nagy, *Systems of symplectic forms on four-manifolds* `arXive:1102.1995` (Ann. SNS Pisa)

Apostolov-Drăghici-Moroianu IJM 12 (2001), 769-789

Armstrong Crelle 542, (2002), 53–84

QJM Ser. (2), 48 (1997) no. 192, 405–415

Calabi in: Seminar on Differential Geometry, PUP, 1982, pp. 259-290

Gauduchon Boll. UMI B (7) 11 (1997), no. 2, suppl., 257-288

Goldberg PAMS 21 (1969) 96–100

Gray Tôhoku Math. J. 28 (1976), 601-612

Nagy-Di Scala

Nurowski-Przanowski Class. Quantum Gravity 16 (1999), no. 3, L9–L13

Sekigawa J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 677–684

Surveys generali:

Apostolov-Drăghici, in: Fields Inst. Commun. 35, AMS, 2003, pp. 25–53

Nagy Habilitationsschrift, Hamburg Universität, 2011