## OSTRUZIONI A METRICHE DI CURVATURA NON NEGATIVA

Il lavoro presentato é in collaborazione con K. Grove, B. Wilking, W. Ziller e trae origine da un articolo di K. Grove e W. Ziller in cui veniva dimostrato il seguente risultato

TEOREMA 0.1. *Ogni fibrato in sfere su $S^4$ ammette metriche a curvatura sezionale non negativa.*

da cui segue

COROLLARIO 0.2. *Alcune sfere esotiche di Milnor ammettono metriche a curvatura non negativa.*

Le tecniche di dimostrazione utilizzavano la geometria Riemanniana delle varietá di coomogeneitá uno ed avevano portato gli autori a formulare la seguente

CONGETTURA 0.3. *Ogni varietá di coomogeneitá uno ammette metriche a curvatura non negativa.*

Tale congettura, se confermata, avrebbe implicato che le sfere esotiche di Kervaire ammettono metriche a curvatura non negativa. Lo scopo del lavoro presentato é provare che tale congettura é falsa. L'origine del lavoro é legata allo studio delle varietá a curvatura positiva, nella presentazione conviene considerare entrambe le classi.

Le principali ostruzioni ad avere curvatura positiva su una varietá Riemanniana sono

- (Bonnet-Myers) Se $(M, g)$ ha curvatura sezionale positiva si ha $\#\pi_1(M) < +\infty$.
- (Synge) Se $(M, g)$ ha curvatura sezionale positiva, dim $M$ é pari ed $M$ é orientabile si ha $\pi_1(M) = 0$, se $\dim(M)$ é dispari allora $M$ é orientabile.

D'ora innanzi $M$ sará compatta e semplicemente connessa. Le ostruzioni riportate sopra non funzionano e le classi con curvatura positiva e non negativa non sono separate da ostruzioni note.

In entrambi i casi la costruzione di esempi noti si basa essenzialmente su costruzioni di prodotto o quoziente a partire da un gruppo di Lie compatto con una metrica biinvariante $g$. In tal caso se $X, Y$ sono ortonormali e $\sigma = span\{X, Y\}$ si ha per la curvatura sezionale $K$

$$K_g(\sigma) = \frac{1}{4}\,||[X, Y]||^2 >= 0$$

Sia ora $\pi : \tilde{M} \to M$ una submersione Riemanniana. Se $\tilde{\sigma}$ si proietta su $\sigma$ si ha, come conseguenza delle formule di O'Neill

$$K(\sigma) \geq \tilde{K}(\tilde{\sigma})$$

Ne segue che le varietá omogenee quoziente di un gruppo di Lie compatto con la metrica biinvariante ammettono metriche a curvatura non negativa. Le metriche indotte in tal modo sugli spazi omogenei sono dette metriche normali omogenee. Tra queste (Berger-Wilking) risultano avere curvatura positiva quelle sugli spazi simmetrici di rango uno

- $S^n, \mathbb{CP}^n, \mathbb{HP}^n, \mathbb{C}a\mathbb{P}^2$

e su tre esempi isolati, le sfere di Berger e una varietá di Allof-Wallach

- $B_7 = Sp(2)/SU(2), \quad B_{13} = SU(5)/Sp(2) \times T^1, \quad W_7 = SU(3)/T_{1,1}$

esistono solo altri quattro esempi di varietá omogenee che ammettono curvatura positiva con metriche diverse dalla metrica normale (Allof, Wallach, Berard-Bergery)

- $SU(3)/T^2$, $Sp(3)/Sp(1)^3$, $F_4/Spin(8)$, $SU(3)/T_{p,q}$

dove $T_{p,q} = T^1$ immerso in un toro massimale di $SU(3)$.

Sempre a partire da gruppi di Lie compatti $G$, muniti di una metrica biinvariante é possibile ottenere esempi di varietá a curvatura non negativa mediante un'altra costruzione. Se $H, K$ sono sottogruppi compatti di $G$ si ha un'azione di $H \times K$ su $G$ data da

$$(h,k)\,g = h\,g\,k^{-1}$$

se tale azione é libera il quoziente é una varietá detta biquoziente, indicata con $H\,\mathrm{G}\,/K$ che sará, in generale, non omgenea. Utilizzando la proiezione si ha una submersione Riemanniana $G \to H\,\mathrm{G}\,/K$ che munisce il biquoziente di una metrica a curvatura non negativa. Con questa tecnica Gromoll e Mayer dimostrarono per la prima volta l'esistenza di metriche a curvatura non negativa su sfere esotiche.

Questa costruzione, partendo peró da metriche diverse dalla metrica biinvariante, porta a costruire anche esempi di biquozienti a curvatura positiva.

- Un esempio in dimensione 6 ed una famiglia infinita in dimensione 7 (Eschenburg)
- Una famiglia infinita in dimensione 13 (Bazaikin).

E' stato provato (Totaro, Kapovitch, Ziller) che non esistono altri biquozienti a curvatura positiva. Questo insieme di costruzioni esaurisce completamente l'elenco di esempi noti di varietá Riemanniane con curvatura sezionale positiva.

Per cercare nuovi esempi é naturale rilassare la condizione di omogeneitá richiedendo che la varietá sia munita di un'azione isometrica di un gruppo di Lie compatto con orbite principali di codimensione uno (varietá di coomogeneitá uno).

Se $M$ e $G$ sono compatti ed esiste una $G$-orbita di codimensione 1 in $M$, si ha che il quoziente $M/G$ é una varietá con bordo di dimensione 1, quindi $M/G = [a,b]$ o $M/G = S^1$. Nel caso di varietá a curvatura positiva il caso interessante (per il teorema di Myers) é $M/G = [a,b]$. Ai punti interni dell'intervallo corrispondono orbite di codimensione 1, dette orbite regolari, ai punti del bordo due orbite di dimensione inferiore, dette orbite singolari. Queste varietá vengono generalmente studiate 'spezzandole in due' ovvero incollando due intorni delle orbite singolari. La struttura di tali intorni é analizzata in dettaglio nel libro di Bredon. Diamo un esempio semplice che chiarisca alcuni elementi fondamentali.

Si considera $M = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times C$ con $G = S^1 \times \mathbb{R}$. L'azione é data da $(e^{i\theta}, a) \cdot (x,z) = (x+a, e^{i\theta} z)$. Ovvero si ha una traslazione lungo l'asse $x$ ed una rotazione nel piano $yz$. L'orbita di un punto generico é un cilindro, ovvero ha codimensione 1, mentre l'asse delle $x$ é un'orbita singolare. Il sottogruppo $K$ di isotropia di un punto regolare é banale, mentre per un punto singolare si ha $H = S^1$. In particolare si ha $H/K = S^1$ é una sfera. Lo spazio normale all'orbita in un punto singolare é $V = \mathbb{R}^2$ e $H/K$ puó essere identificato con la sfera unitaria di tale spazio.

Una varietá di coomogeneitá uno con due orbite singolari é, in generale, determinata da un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & G & \\
H_- \arrow[ur] & & H_+ \arrow[ul] \\
 & K \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

dove $K \subset H_- \cap H_+ \subset G$ e $H_-/K$, $H_+/K$ sono sfere che possono essere identificate con le sfere unitarie dello spazio normale alle orbite singolari $G/H_-$ e $G/H_+$ rispettivamente.

La congettura secondo la quale ogni varietá di coomogeneitá uno ammette metriche invarianti a curvatura non negativa trae origine dal seguente risultato di Grove e Ziller

Teorema 0.4. *Se la codimensione delle orbite singolari é 2, la varietá ammette metriche invarianti a curvatura non negativa.*

L'applicazione piú interessante di questa congettura sarebbe stata quella sulle sfere esotiche di Kervaire. Insieme alle sfere di Milnor sono le sfere esotiche che ammettono piú simmetrie (queste due classi sono distinte dalle altre sfere esotiche anche dal fatto di essere le uniche sfere esotiche bordo di varietá parallelizzabili). Le sfere di Kervaire sono i sottoinsiemi $M_d^{2n-1}$ di $\mathbb{C}^{n+1}$ definiti da

$$\begin{cases} z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \\ |z_0|^2 + \ldots + |z_n^2| = 1 \end{cases}$$

per $n, d$ dispari. E' noto che si tratta di sfere esotiche se $2n-1 = 1 \bmod 8$, $d = 3 \bmod 8$. Tali sfere ammettono l'azione del gruppo $S^1 \times SO(n)$ definita da

$$(e^{i\theta}, A) \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (e^{di\theta} z_0, A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix})$$

tale azione risulta essere di coomogeneitá uno con diagramma

$$\begin{array}{ccccc} & & S^1 \times SO(n) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ SO(2) \times SO(n-2) & & & & O(n-1) \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & \mathbb{Z}_2 \times SO(n-2) & & \end{array}$$

con orbite singolari di codimensione 2 e $n$. La prima orbita singolare é totalmente geodetica, non ammettendo questa metriche omogenee a curvatura positiva ne segue che le sfere di Kervaire non ammettono metriche a curvatura positiva (Back-Hsiang). Il nostro risultato é

Teorema 0.5. *Per $n \geq 4$, $d \geq 3$ le varietá $M_d^{2n-1}$ non ammettono metriche invarianti a curvatura non negativa.*

Piú in generale, indicando con $l_-, l_+$ le codimensioni delle orbite singolari, si dimostra che

Teorema 0.6. *Per ogni coppia di interi $(l_-, l_+) \neq (2, 2)$ con $l_\pm \geq 2$ esiste una famiglia infinita di varietá di coomogeneitá uno con orbite singolari di codimensione $l_\pm$ che non ammette metriche invarianti a curvatura non negativa.*