Su una generalizzazione delle varietà di contatto

1 Definizioni preliminari

Una f-struttura su una varietà differenziabile M è un campo tensoriale φ di tipo (1,1) di rango costante tale che $\varphi^3 + \varphi = 0$. Si prova che il rango di φ è pari e si pone $\mathtt{rank}\varphi = \mathtt{2n}$. Si parla di *$f$-struttura con nucleo parallelizzabile* (brevemente $f.pk$-struttura) quando esistono s campi vettoriali $\xi_1, \ldots, \xi_s$ su M che parallelizzano il nucleo della f-struttura, ovvero tali che

$$\mathtt{ker}\varphi = < \xi_1, \ldots, \xi_s > .$$

Naturalmente in questo caso la dimensione di M è 2n+s. Si indicano con $\mathcal{D}$ la distribuzione $\mathtt{Im}(\varphi)$, e con $\eta^1, \ldots, \eta^s$ le forme duali dei campi $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Si ha ovviamente:

- $\eta^i(\xi_j) = \delta^i_j$
- $TM = \mathcal{D} \oplus < \xi_1, \ldots, \xi_s >$
- $\mathtt{Im}\varphi = \bigcap_{i=1}^{s} \mathtt{ker}\eta^i$
- $\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes \xi_i$.

Si prova che su una $f.pk$-varietà esiste sempre una metrica g compatibile, ovvero tale che

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\eta^i(Y).$$

Fissata una di tali metriche, la struttura $(\varphi, \xi_i, \eta^j, g)$, $i, j = 1, \ldots, s$, viene chiamata $f.pk$-struttura metrica sulla varietà M. Si può anche dire che $(M, \varphi, \xi_i, \eta^j, g)$ è una $f.pk$-varietà metrica. È immediata conseguenza delle definizioni che in una $f.pk$-varietà metrica le distribuzioni $\mathcal{D}$ e $< \xi_1, \ldots, \xi_s >$ sono ortogonali fra loro. Naturalmente per $s = 1$ si ha una varietà di quasi contatto metrica: in questo senso si tratta di una generalizzazione delle varietà di contatto. Si osservi che nel caso in esame, la dimensione 2n+s della varietà può essere pari oppure dispari. Negli anni '60 del secolo scorso si trovano lavori sulle f-strutture, per esempio di K. Yano (cf. [26, 27]). Agli inizi degli anni '70 compaiono i primi lavori sulle $f.pk$-varieà (cf. [2, 16, 17]), chiamate in altro modo. In particolare, in [2], sono state definiti tre diversi tipi di $f.pk$-strutture:

- $\mathcal{K}$-*strutture*
- $\mathcal{C}$-*strutture*
- $\mathcal{S}$-*strutture.*

Si considerano su una $f.pk$-varietà: la 2-forma fondamentale $F = g(-, \varphi-)$ ed il tensore $N_\varphi = [\varphi, \varphi] + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta^i \otimes \xi_i$. Una $f.pk$-varietà tale che $N_\varphi = 0$ si dice *normale*. Una $f.pk$-struttura normale con 2-forma fondamentale chiusa viene chiamata $\mathcal{K}$-*struttura*. Tra le proprietà delle $\mathcal{K}$- strutture provate in [1], si ricorda, per esempio, che i campi $\xi_1, \ldots, \xi_s$ sono tutti di Killing e che $[\xi_i, \xi_j] = 0$, per ogni $i, j = 1, \ldots, s$. Segue che la distribuzione $< \xi_1, \ldots, \xi_s >$ è integrabile. Alcune proprietà delle fogliazioni definite da tali distribuzioni integrabili sono state studiate in [12]. Si osserva che per $s = 1$ una $\mathcal{K}$-varietà non è altro che una varietà quasi Sasakiana (cf., ad esempio, [1, 25, 18, 19]). Riguardo le $\mathcal{K}$-strutture, si segnala anche [13].

Una $\mathcal{C}$-*struttura* su M è una $\mathcal{K}$-struttura $(\varphi, \xi_i, \eta^j, g)$, $i, j = 1, \ldots, s$ tale che le forme $\eta^1, \ldots \eta^s$ siano chiuse. Una $\mathcal{C}$-struttura è una struttura cosimplettica nel caso $s = 1$. Le $\mathcal{C}$-strutture possono essere caratterizzate come $\mathcal{K}$-strutture nelle quali la 2-forma fondamentale F è parallela rispetto alla connessione di Levi-Civita ∇ di g o, equivalentemente, la f-struttura φ è parallela, sempre rispetto a ∇. In [2] è provato un teorema di decomposizione locale: una $\mathcal{C}$-varietà è localmente prodotto di una varietà di Kähler di dimensione $2n$ e di un gruppo di Lie abeliano di dimensione s.

In [23] sono definite le *almost* $\mathcal{C}$-varietà, che sono $f.pk$-varietà con F e $\eta^1, \ldots \eta^s$ chiuse. In altri termini si tratta di $\mathcal{C}$-varietà non-normali.

Le $\mathcal{S}$-*varietà* sono $\mathcal{K}$-varietà tali che $d\eta^1 = \cdots = d\eta^s = F$. Il caso $s = 1$ corrisponde alle strutture di Sasaki. Un esempio di $\mathcal{S}$-struttura è fornito da D. E. Blair in [2]: egli prova che il fibrato toroidale $\pi : M \to N$ su una varietà di Kähler N di dimensione $2n$, con 2-forma fondamentale Ω e con forma di connessione $\gamma = (\eta^1, \dots, \eta^s)$ a valori nell'algebra di Lie tale che $d\eta^i = \pi^*\Omega$, è una $\mathcal{S}$-varietà.

Se non si richede la normalità della struttura, si hanno le *almost* $\mathcal{S}$-strutture, ovvero $f.pk$-strutture metriche con la condizione $d\eta^1 = \cdots = d\eta^s = F$. Il caso $s = 1$ corrisponde alle strutture metriche di contatto. In [10] si trovano esempi di almost $\mathcal{S}$-varietà che non sono $\mathcal{S}$-varietà. La definizione di almost $\mathcal{S}$-varietà è stata data in [15]. In realtà alcune proprietà di queste varietà erano già state studiate in [7].

2 Ancora un teorema di Darboux

In [9] si è provata l'esistenza e l'unicità di campi vettoriali $\xi_1, \dots, \xi_s$ di tipo Reeb su una varietà M di dimensione $2n+s$ munita di 1-forme $\eta^1, \dots, \eta^s$ tali che $d\eta^1 = \cdots = d\eta^s := F$ sia una 2-forma di rango costante 2n, $d\eta^1 \wedge \cdots \wedge d\eta^s \wedge F^n \neq 0$ e con la condizione che $\xi_i \lrcorner F = 0$. I campi $\xi_1, \dots, \xi_s$ verificano le condizioni $\eta^i(\xi_j) = \delta^i_j$ e $[\xi_i, \xi_j] = 0$, per ogni $i, j = 1, \dots, s$ (cf. anche [6]). Di conseguenza esiste su M una almost $\mathcal{S}$-struttura $(\varphi, \xi_i, \eta^j, g)$ su M, avente F come 2-forma fondamentale (vedi Teorema 3.1 di [9]).

Come applicazione di questo risultato si ottiene il seguente esempio.

Esempio 2.1. Siano $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z^1, \dots, z^s)$ le coordinate standard su $M := \mathbb{R}^{2n+s}$. Per ogni $i = 1, \dots, s$ si considerano le 1-forme

$$\eta^i := \frac{1}{2}\left(dz^i - \sum_{\alpha=1}^n y^\alpha dx^\alpha\right).$$

Si verifica che

$$\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^s \wedge (d\eta^i)^n \neq 0, \quad d\eta^1 = \cdots = d\eta^s = \sum_{\alpha=1}^n dx^\alpha \wedge dy^\alpha.$$

Inoltre, posto $\xi_i := 2\frac{\partial}{\partial z^i}$ si ha $\eta^i(\xi_j) = \delta^i_j$, $d\eta^i(\xi_j, X) = 0$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, s\}$, $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^{2n+s})$. Quindi $\xi_1, \dots, \xi_s$ sono gli unici s campi vettoriali previsti nel teorema Teorema 3.1 di [9]. La metrica Riemanniana è data da

$$g := \sum_{i=1}^{s} (\eta^i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{n} (dx^\alpha)^2 + (dy^\alpha)^2.$$

La matrice di g rispetto alla base canonica è

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & I_n & 0 \\ B^t & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

dove $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + s y^\alpha y^\beta$, $\quad B_{\alpha i} = -y^\alpha$, $\alpha,\ \beta \in \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, s\}$ e I_n, I_s sono le matrici identiche di ordine n e s, rispettivamante. La matrice inversa è

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & -B \\ 0 & I_n & 0 \\ -B^t & 0 & C \end{pmatrix}$$

dove, per ogni $i, j = 1, \dots, s$, $C_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n} (y^\alpha)^2$. La f-struttura φ è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

$(M, \varphi, \xi_i, \eta^j, g)$, $(i, j = 1, \dots, s)$ è una almost $\mathcal{S}$–varietà. Si verifica anche che $N_\varphi = 0$ e quindi $(M, \varphi, \xi_i, \eta^j, g)$ è una $\mathcal{S}$-varietà. Si osserva che i campi

$$2(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \overline{\xi}), \dots, 2(\frac{\partial}{\partial x^n} + y^n \overline{\xi}), 2\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, 2\frac{\partial}{\partial y^n},$$

dove $\overline{\xi} = \sum_{j=1}^{s} \xi_j$, sono una base di $\mathcal{D}$. In effetti questi campi, insieme con $\xi_1, \dots, \xi_s$ formano una φ-base, cioè sono ortonormali e

$$\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + y^1 \overline{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial y^1}, \ \dots, \ \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x^n} + y^n \overline{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Questo esempio generalizza l'esempio di struttura Sasakiana su $\mathbb{R}^{2n+1}$ pubblicato proprio da Sasaki (cf. [24]).
Anche per le almost $\mathcal{S}$-varietà vale un teorema di tipo Darboux (cf [6]) che si enuncia in questi termini:

Teorema 2.1. *Sia M una varietà di dimensione $2n+s$ sulla quale esistano s 1-forme $\eta^1, \dots, \eta^s$ tali che $d\eta^1 = \dots = d\eta^s := F$ sia una 2-forma di rango costante $2n$ e $d\eta^1 \wedge \dots \wedge d\eta^s \wedge F^n \neq 0$. Allora esistono coordinate locali $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z^1, \dots, z^s)$ tali che*

$$\eta^i = dz^i - \sum_{\alpha=1}^{s} y^\alpha dx^\alpha.$$

Quest'ultimo teorema assicura che in un certo senso localmente una almost $\mathcal{S}$-varietà è del tipo dell'esempio 2.1.

3 Curvatura

Se si munisce $\mathbb{R}^{2n+1}$ della struttura Sasakiana di [24] si ottiene un esempio di varietà di Sasaki con curvatura φ–sezionale costante -3. Inoltre in [21] è stato provato che $\mathbb{R}^{2n+1}$ con la struttura definita da Sasaki è una varietà η-Einstein. Al contrario $\mathbb{R}^{2n+s}$, per $s > 1$, con la struttura dell'esempio 2.1 non ha curvatura φ–sezionale costante ne' è una varietà η-Einstein (cf. [9]). Per provare queste affermazioni, si devono determinare le componenti del tensore di curvatura. Per generici indici i, j, r si pone, con notazioni standard,

$$G^r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right).$$

Usando le lettere greche $\alpha, \beta, \dots$ come indici relativi a $x^1, \dots, x^n$, le lettere greche asteriscate $\alpha^*, \beta^*, \dots$ come indici relativi a $y^1, \dots, y^n$, e le lettere dell'alfabeto $i, j, k \dots$ come indici relativi a $z^1, \dots, z^s$, si trova

$$G^\alpha_{\beta\gamma^*} = \frac{1}{8}\left(\delta_{\beta\gamma} y^\alpha + \delta_{\alpha\gamma} y^\beta\right); \quad G^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{8}\left(\delta_{\alpha\beta} y^\gamma + \delta_{\alpha\gamma} y^\beta\right);$$

$$G^{\alpha^*}_{i\beta} = \frac{1}{8}\delta_{\alpha\beta}; \quad G^i_{\alpha\beta^*} = -\frac{1}{8}\delta_{\alpha\beta}; \quad G^\alpha_{i\beta^*} = -\frac{1}{8}\delta_{\alpha\beta};$$

le altre G^r_{ij} sono nulle. Si deduce che i simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma^*} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma} y^\beta; \quad \Gamma^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} y^\gamma + \delta_{\alpha\gamma} y^\beta\right); \quad \Gamma^\alpha_{\beta^* i} = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta};$$

$$\Gamma^i_{\alpha\beta^*} = \frac{1}{2}\left(y^\alpha y^\beta - \delta_{\alpha\beta}\right); \quad \Gamma^i_{j\alpha^*} = -\frac{1}{2} y^\alpha; \quad \Gamma^{\alpha^*}_{\beta i} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}.$$

Quindi le componenti non nulle del tensore di curvatura Riemanniana sono :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{16}(\delta_{\alpha\gamma}y^\beta y^\delta - \delta_{\alpha\delta}y^\beta y^\gamma - s\delta_{\gamma\beta}y^\alpha y^\delta + s\delta_{\beta\delta}y^\alpha y^\gamma)$$

$$R_{\alpha^*\beta^*\gamma\delta} = \frac{1}{16}((s-1)\left(\delta_{\alpha\gamma}y^\beta y^\delta - \delta_{\alpha\delta}y^\beta y^\gamma\right) + s(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} - \delta_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma}));$$

$$R_{\alpha\beta^*\gamma^*\delta} = \frac{1}{16}\left(2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + s\delta_{\beta\delta}\delta_{\alpha\gamma} - s\delta_{\beta\gamma}y^\alpha y^\delta\right); \quad R_{i\beta^*\gamma^*\delta} = \frac{1}{16}\delta_{\beta\gamma}y^\delta;$$

$$R_{\alpha ij\delta} = -\frac{1}{16}\delta_{\alpha\delta}; \quad R_{i\beta\gamma\delta} = \frac{1}{16}\left(\delta_{\beta\gamma}y^\delta - \delta_{\beta\delta}y^\gamma\right); \quad R_{\alpha^* ij\delta^*} = -\frac{1}{16}\delta_{\alpha\delta}.$$

Si ricava, per esempio, che la curvatura φ–sezionale dei piani generati da $\left\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \varphi(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})\right\}$, per ogni $\alpha \in \{1,\ldots,n\}$, è

$$-2 - s + s(s-1)(y^\alpha)^2.$$

Quindi la curvatura φ–sezionale di M non è costante. Le componenti del tensore di Ricci sono

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(sny^\alpha y^\beta - \delta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4}((s-1)y^\alpha y^\beta + (s-1)^2\delta_{\alpha\beta}\sum_{\rho=1}^{n}(y^\rho)^2);$$

$$R_{\alpha^*\beta^*} = \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\left(-2 + s(s-1)\sum_{\rho=1}^{n}(y^\rho)^2\right); \quad R_{\alpha\beta^*} = 0,$$

$$R_{\alpha i} = -\frac{1}{2}ny^\alpha + \frac{1}{4}(1-s)y^\alpha; \quad R_{ij} = \frac{1}{2}n, \quad R_{\alpha^* i} = 0.$$

Confrontando con (1.12) di [20], si conclude che $\mathbb{R}^{2n+s}$ non è η-Einstein, quando $s > 1$.

Nello studio delle almost $\mathcal{S}$-varietà si usano molto le proprietà dei tensori $h_i = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi_i}\varphi$. Essi sono simmetrici rispetto a g e verificano, tra le altre, le seguenti proprietà (cf [7, 15]):

1. $h_i(\xi_j) = 0, \quad \eta^j \circ h_i = 0$ per ogni $i, j = 1, \ldots, s$
2. $\nabla_X \xi_i = -\varphi X - \varphi h_i(X)$, per ogni $i = 1, \ldots, s$, $X \in \Gamma(TM)$,
3. fissato $i = 1, \ldots, s$, si ha: ξ_i è di Killing $\Leftrightarrow h_i = 0$

4. $R_{\xi_i X}\xi_j - \varphi(R_{\xi_i \varphi X}\xi_j) = 2((h_j \circ h_i)X + \varphi^2 X)$ per ogni $i, j = 1, \dots, s$, $X \in \Gamma(TM)$.

Da (2) si ha $\nabla_{\xi_i}\xi_j = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, s$; se poi M è una $\mathcal{S}$-varietà, allora i campi $\xi_1, \dots, \xi_s$ sono di Killing (cf. [1]): quindi da (2) e (3) segue che $\nabla_X \xi_i = -\varphi X$, per ogni $i = 1, \dots, s$, $X \in \Gamma(TM)$.

In [8] sono provati i seguenti risultati

- $Q\xi_i = 2n\bar{\xi}$, dove Q è l'operatore di Ricci e $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{s} \xi_i$
- $Q \circ \varphi = \varphi \circ Q$, valida solo se vale la normalità
- fissato $i = 1, \dots, s$, si ha: ξ_i è di Killing $\Leftrightarrow$ per ogni $X \in \Gamma(TM)$ $R_{\xi_i X}\xi_i = \varphi^2 X$.

È noto che la formula

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{3.1}$$

è caratterizzante per le varietà di Sasaki, nel senso che una varietà metrica di quasi contatto è di Sasaki se e soltanto se vale (3.1). Nel caso più generale di una $\mathcal{S}$-varietà M^{2n+s} si ha (cf [7])

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, \varphi Y) + \bar{\eta}(Y)\varphi^2(X), \tag{3.2}$$

essendo $\bar{\eta}$ la 1-forma duale di $\bar{\xi}$. Viceversa (cf [8]), se su una $f.pk$-varietà metrica M^{2n+s} vale (3.2) ed inoltre, per ogni $i, j = 1, \dots, s$, $\mathcal{L}_{\xi_i}\eta_j = 0$ e ξ_i è di Killing, allora si tratta di una $\mathcal{S}$-varietà. In particolare, se M^{2n+s} è una almost $\mathcal{S}$-varietà tale che (3.2) sia verificata e $\xi_1, \dots, \xi_s$ siano di Killing, allora M^{2n+s} è una $\mathcal{S}$-varietà: infatti in una almost $\mathcal{S}$-varietà è sempre vero che per ogni $i, j = 1, \dots, s$, $\mathcal{L}_{\xi_i}\eta_j = 0$.

Nel 1976 D.E.Blair ha provato che non ci sono varietà metriche di contatto di dimensione 2n+1, n≥2 che siano piatte ed ha trovato un esempio di varietà metrica di contatto piatta di dimensione 3 (cf. [2]). L'esempio è il seguente:

Esempio 3.1. Si considerano: $M_0 = \mathbb{R}^3$ con le sue coordinate standard (x, y, z) ed i seguenti oggetti geometrici su M_0

- la metrica Riemanniana
$$h_0 := \frac{1}{4} g_{\text{can}}$$
dove g_{can} è la metrica standard piatta su M_0

- i campi vettoriali

$$\xi_0 = 2\cos(z)\frac{\partial}{\partial x} + 2\sin(z)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_0 = -2\sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + 2\cos(z)\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_0 = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

  che sono ortonormali rispetto ad h_0

- la 1-forma

$$\eta_0 := \frac{\cos(z)}{2}dx + \frac{\sin(z)}{2}dy,$$

- l'endomorfismo $\varphi_0 \in \mathrm{End}(TM_0)$ tale che

$$\varphi_0(Y_0) = -X_0,\ \varphi_0(X_0) = Y_0, \quad \varphi_0(\xi_0) = 0.$$

  Si ha:

$$d\eta_0 = \frac{\sin(z)}{2}dx \wedge dz - \frac{\cos(z)}{2}dy \wedge dz.$$

$(M_0, \xi_0, \eta_0, F_0, h_0)$ risulta essere una varietà metrica di contatto, cioè $F_0 = d\eta_0$, F_0 2-forma fondamentale associata a h_0 e φ_0. Ovviamente la curvatura sezionale di h_0 è 0.

Il teorema che segue (cf. [14]) generalizza, in dimensione $2n+s$, $s \geq 2$, il teorema di Blair.

Teorema 3.1. *Sia* $(M^{2n+s}, \varphi, \xi_i, \eta^j, g)$, $i, j = 1, \ldots, s$ *una almost* $\mathcal{S}$*-varietà metrica, con* $n \geq 2$. *Allora* M *non può essere piatta.*

In [14] è esibito il seguente esempio di varietà di dimensione 2+s piatta.

Esempio 3.2. Si considera l'azione $\phi : \mathbb{R} \times M_0 \to M_0$ del gruppo di Lie $G := \mathbb{R}$ su M_0 così definita:

$$\phi(t, (x, y, z)) = \big(x + 2t\cos(z), y + 2t\sin(z), z\big).$$

Si può osservare che l'azione di ϕ conserva tutte le strutture assegnate su M_0, ovvero per ogni $t \in G$ si ha

$$(\phi_t)^* h_0 = h_0,\ (\phi_t)_* \xi_0 = \xi_0,\ (\phi_t)^* \eta_0 = \eta_0,\ (\phi_t)^* \varphi_0 = \varphi_0,\ (\phi_t)^* F_0 = F_0$$

ed inoltre $\xi_0 \lrcorner F_0 = 0$. Poichè l'azione di ϕ è propria e libera, esiste una struttura di varietà differenziabile sul quoziente

$$B_0 := M_0/G$$

in modo che $\pi_0 : M_0 \to B_0$ sia un fibrato principale con gruppo strutturale G. Inoltre, poichè ϕ agisce per isometrie, c'è un'unica metrica Riemanniana g_0 su B_0 tale che

$$\pi_0 : (M_0, h_0) \to (B_0, g_0)$$

sia una fibrazione Riemanniana. Dall'invarianza delle strutture segue che F_0 è proiettabile ad una 2-forma Ω_0 su B_0 e che φ_0 è proiettabile ad una struttura quasi complessa J_0 su B_0. (B_0, g_0, J_0) è una superficie di Riemman e la sua forma di Kähler è proprio Ω_0; inoltre

$$\pi_0^* \Omega_0 = F_0.$$

Siano M', B' e B varietà differenziabili, $\pi' : M \to B'$ una fibrazione localmente triviale, non necessariamente vettoriale e $u : B \to B'$ un'applicazione differenziabile. Si può considerare il fibrato pull-back $\pi : M \to B$ in modo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{U} & M' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{u} & B' \end{array}$$

commuti. U è l'applicazione tale che $U(a,b) = b$ per ogni $(a,b) \in M$. Si ricorda che $(a,b) \in M$ se e solo se $u(a) = \pi'(b)$ e che la fibra standard del fibrato pull–back coincide con la fibra standard di $\pi' : M' \to B'$ e l'applicazione U è un diffeomorfismo quando ristretto alle fibre. M è una "embedded submanifold" di $B \times M'$.

Si suppone ora che (M', h'), (B', g') siano varietà Riemanniane, che $\pi' : (M', h') \to (B', g')$ sia una una fibrazione Riemanniana, e che $u : B \to B'$ sia un'immersione totalmente geodetica. Si pone

$$h := c \cdot U^* h', \quad g := c \cdot u^* g',$$

dove c è una costante positiva. I campi tensoriali g, h sono metriche Riemanniane su B e M, rispettivamente. Si verifica che la fibrazione $\pi : (M, h) \to (B, g)$ è Riemanniana; inolte si trova la relazione tra le connessioni di Levi-Civita delle metriche coinvolte e se ne deduce il seguente risultato

Proposizione 3.1. *Se (M', h') ha curvatura sezionale costante K' allora (M, h) ha curvatura sezionale costante $\frac{1}{c}K'$; in particolare se (M', h') è piatta, allora anche (M, h) lo è.*

Per estendere l'esempio ad una $f.pk$-struttura, si fissa un intero positivo s e si pone

$$M' := \overbrace{M_0 \times \cdots \times M_0}^{s},\ B' := \overbrace{B_0 \times \cdots \times B_0}^{s},\ \pi' := \overbrace{\pi_0 \times \cdots \times \pi_0}^{s}.$$

Ciascuna delle varietà M' e B' ha una struttura naturale di prodotto Riemanniano h' e g' rispettivamente e quindi la proiezione $\pi' : (M', h') \to (B', g')$ è una fibrazione Riemanniana. Si pone

$$B := B_0$$

e si considera l'applicazione diagonale $u : B \to B'$ tale che per ogni $x \in B$ si abbia

$$u(x) = (x, \ldots, x) \in B'.$$

u è un' immersione e quindi si può costruire il fibrato pull-back $\pi : M \to B$ del fibrato $\pi' : M' \to B'$ tramite l'applicazione $u : B \to B'$. Inoltre esiste l'applicazione $U : M \to M'$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{U} & M' \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow{u} & B' \end{array}$$

sia commutativo. M può essere descritta come segue

$$(a, b_1, \ldots, b_s) \in M \Leftrightarrow u(a) = \pi'(b_1, \ldots, b_s) \Leftrightarrow a = \pi_0(b_1) = \cdots = \pi_0(b_s)$$

ed inoltre $U(a, b_1, \ldots, b_s) = (b_1, \ldots, b_s)$ per ogni $(a, b_1, \ldots, b_s) \in M$. Posto $c = \frac{1}{s^2}$, si definiscono le seguenti metriche Riemanniane

$$h := \frac{1}{s^2}U^*h',\ g := \frac{1}{s^2}u^*g'$$

su M e B, rispettivamente. Dalla costruzione generale del fibrato pull-back segue che $\pi : (M, h) \to (B, g)$ è una fibrazione Riemanniana. Inoltre

$$g = \frac{1}{s}g_0,$$

$$h((v, X_1, \ldots, X_s), (w, Y_1, \ldots, Y_s)) = \frac{1}{s^2}\Big(h'(X_1, Y_1) + \cdots + h'(X_s, Y_s)\Big).$$

Si definiscono:

- per ogni $k = 1, \ldots, s$ la 1-forma su M
$$\eta^k := \frac{1}{s}(P_k \circ U)^* \eta_0,$$
dove $P_k : M' \to M_0$ è la proiezione sulla k-ma componente,

- la 2-forma su B
$$\Omega := \frac{1}{s}\Omega_0.$$

Si verifica che $d\eta^k = \pi^*\Omega$. e quindi per il Teorema 3.1 di [9], già menzionato, esiste su M un'almost $\mathcal{S}$-struttura $(\varphi, \xi_i, \eta^j, h)$, $i, j = 1, \ldots, s$. Poichè (M', h') è piatta si ha che (M, h) è anch'essa piatta (cf. Proposizione 3.1) e $\dim M = 2 + s$. Quindi questo esempio dimostra che l'ipotesi $n > 1$ è necessaria nel Teorema 3.1.

In [22] Z. Olaszak ha provato che se una varietà metrica di contatto di dimensione maggiore o uguale a 5 ha curvatura sezionale costante c, allora $c = 1$ e la varietà è Sasakiana. Questo teorema non può essere generalizzato al caso di una almost $\mathcal{S}$-varietà $(M, \varphi, \xi_i, \eta^j, g)$, $i, j = 1, \ldots, s$ di dimensione $2n+s$, $n \geq 2$, $s \geq 2$, perchè in questo caso $\nabla_{\xi_i}\xi_j = 0$ e, quindi, se la curvatura sezionale fosse costante, sarebbe nulla, contro il Teorema 3.1.

I risultati che seguono generalizzano alcuni Teoremi provati da Z.Olszak in [22]. In una $\mathcal{S}$-varietà M^{2n+s}, $n \geq 2$, $s \geq 2$, vale l'uguaglianza:

$$\|\nabla\varphi\| = 4ns. \tag{3.3}$$

Viceversa, se M^{2n+s} è una almost $\mathcal{S}$-varietà nella quale (3.3) è verificata e per di più i campi $\xi_1, \ldots, \xi_s$ sono di Killing, allora M è una $\mathcal{S}$-varietà. Il corrispondente Teorema di Z.Olszak afferma invece che una varietà metrica di contatto M^{2n+1}, $n \geq 2$, è Sasakiana se e soltanto se $\|\nabla\varphi\| = 4n$.

Un'altra disuguaglianza valida in una almost $\mathcal{S}$-varietà M^{2n+s}, $n \geq 2$, è la seguente

$$S^* - S + 4n^2 s \geq 0. \tag{3.4}$$

Inoltre sussiste l'uguaglianza se e soltanto se M è una $\mathcal{S}$-varietà. In (3.4) S^* è la curvatura $*$-scalare, cioè $S^* = \sum_{i,j=1}^{s} g(R_{E_iE_j}\varphi E_j, \varphi E_i)$, $\{E_1, \ldots, E_{2n+s}\}$

base ortonormale. Questo risultato segue dall'identità $S^* - S + 4n^2 s = \frac{1}{2}(\|\nabla\varphi\| - 4ns) + \sum_{i=1}^{s} \mathtt{traceh_i}$.

In [1] D.E.Blair ha provato che il fibrato toroidale $\pi : M \to N$ su una varietà di Kähler N di dimensione $2n$, con curvatura olomorfa costante K, 2-forma fondamentale Ω e forma di connessione $\gamma = (\eta^1, \ldots, \eta^s)$ a valori nell'algebra di Lie tale che $d\eta^i = \pi^*\Omega$, è una $\mathcal{S}$-varietà con curvatura φ-sezionale costante $H = K - \frac{3}{4}s$.

In [10] si è provato che se M^{2n+s}, $n \geq 2$ è una almost $\mathcal{S}$-varietà con curvatura φ-sezionale costante H allora la curvatura scalare S verifica la seguente disuguaglianza

$$S \leq n(n+1)H + ns(3n+1) \tag{3.5}$$

e vale l'uguaglianza se e soltanto se M è una $\mathcal{S}$-varietà.
Si osservi che ponendo $s = 1$ in (3.4) e (3.5) si riottengono i risultati di Z.Olszak.
Molto più complicata rispetto al caso di contatto è la seguente disuguaglianza che riguarda la curvatura scalare di una almost $\mathcal{S}$-varietà M^{2n+s}, $n \geq 2$, conformemente piatta:

$$S \leq \frac{4n(n-1)(2n+s)(2n+s-1)}{4n^2 + 4ns - 8n + s^2 - 5s + 4}. \tag{3.6}$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e soltanto se M è una $\mathcal{S}$-varietà. Nel caso $s = 1$ (3.6) si riduce semplicemente a $S \leq 2n(2n+1)$ e vale l'uguaglianza se e solo se la M è Sasakiana.

Si conclude evidenziando che esistono $\mathcal{S}$-varietà di dimensione pari che non ammettono una struttura di Kähler (per esempio $U(2)$, cf. [11]): pertanto esistono varietà sulle quali una $\mathcal{S}$-struttura è la migliore struttura che si possa avere.

References

[1] D.E. Blair: *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Diff. Geometry, 1 (1967), pp. 331-345

[2] D.E. Blair: *Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$*, J. Diff. Geometry, 4 (1970), pp. 155-167

[3] D.E. Blair: *On the non-existence of flat contact metric structures*, Tôhoku Math. Journ. 28 (1976), 373-379.

[4] D.E. Blair: *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. 509, Springer-Verlag, 1976

[5] D.E. Blair: *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhäuser, Basel, 2001

[6] D.E. Blair, L. Di Terlizzi, J.J. Konderak: *A Darboux theorem for generalized contact manifolds*, Note di Matematica, to appear

[7] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández: The curvature tensor fields on f-manifolds with complemented frames, An. Univ. 'Al.I. Cuza', Iaşi, Mat., 36 (1990), 151–161

[8] L. Di Terlizzi: *On a generalization of contact metric manifolds*, Publ. Math. Debrecen Tomus 64 fasc 3-4 (2004) 401-413

[9] L. Di Terlizzi: *On the curvature of a generalization of contact metric manifolds*, Acta Math. Hungar. 110 (3) (2006), 225–239

[10] L.Di Terlizzi: *Scalar and φ-sectional curvature of a certain type of metric f-structures*, to appear in Mediterranean J. of Math.

[11] L.Di Terlizzi, J.J.Konderak: *Examples of a genaralization of contact metric structures on fibre bundles*, to appear in J. of Geometry

[12] L.Di Terlizzi, J. Konderak, A.M. Pastore, R. Wolak: *$\mathcal{K}$–structures and foliations*, Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis, sectio mathematica, vol. 44 (2001)

[13] L.Di Terlizzi, A.M. Pastore: *Some results on $\mathcal{K}$–manifolds*, Balkan J. of Geometry and Its Applications, Vol.7, No.1 (2002) pp.43-62

[14] L. Di Terlizzi, J.J. Konderak, A.M. Pastore: *On the flatness of a class of metric f–manifolds*, Bull. Belgian Math. Soc. 10 (2003), 461-474

[15] K. Duggal, S. Ianus, A.M. Pastore: *Maps interchanging f–structures and their harmonicity*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 67 (1) (2001) 91–115

[16] S.I.Goldberg, K.Yano: *On normal globally framed f–manifolds*, Tôhoku Math. Journal, 22 (1970), pp. 362-370

[17] S.I.Goldberg, K.Yano: *Globally framed f–manifolds*, Illinois Math. Journal, 22 (1970), 456-474

[18] S.Kanemaki: *On quasi-Sasakian manifolds*, Tôhoku Math. Journal, 29 (1977), pp. 227-233

[19] S.Kanemaki: *On quasi-Sasakian manifolds*, Banach Canter Pubblications, Vol.12, (1984), pp. 97-125

[20] M. Kobayashi, S. Tsuchiya: Invariant submanifolds of an f-manifold with complemeted frames, Kōdai Math. Sem. Rep., 24 (1972), 430-450.

[21] M. Okumura: On infinitesimal conformal and projective transformatios of normal contact spaces, Tôhoku Math. J., 14 (1962), 398-412

[22] Z. Olszak: On contact metric manifolds, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 247-253

[23] A.M. Pastore: *Almost $\mathcal{C}$-manifolds con foglie Kähler ed applicazioni armoniche*, Rapporto n. 2/1994 del Dip. di Matematica dell'Univ. di Bari.

[24] S. Sasaki: Almost contact manifolds, Lecture Notes, Math. Inst., Tôhoku Univ., Vol. 1, 1965

[25] S.Tanno: *Quasi Sasakian structures of rank 2p+1*, J. of Differential Geomatry, 5 (1971), pp. 317-324

[26] K. Yano: *On a structure f satisfying* $f^3 + f = 0$, Tecnical report No.12, University of Washington (1963), pp. 99–109

[27] K. Yano: *On a structure defined by a tensor field f satisfying* $f^3 + f = 0$, Tensor 14 (1963), pp. 99–109

[28] K. Yano, M. Kon: *Structures on manifolds*, Series in Pure Math., Vol. 3, World Scientific, Singapore, 1984