Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

Diego Conti

Università di Milano Bicocca

Pescara, 16 Giugno 2006

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a $\dim G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Strutture metriche quasi contatto

Una U(2)-struttura su M^5 è

- metrica riemanniana g
- $T^*M = \langle\alpha\rangle \oplus \alpha^\perp$
- $\omega_1 \in \Omega^2$ non degenere, $\alpha \lrcorner \omega_1 = 0$.
- Struttura quasi-complessa su $\alpha^\perp$:

$$\alpha^\perp \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Strutture metriche quasi contatto

Una U(2)-struttura su M^5 è

- metrica riemanniana g
- $T^*M = \langle\alpha\rangle \oplus \alpha^\perp$
- $\omega_1 \in \Omega^2$ non degenere, $\alpha \lrcorner \omega_1 = 0$.
- Struttura quasi-complessa su $\alpha^\perp$:

$$\alpha^\perp \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

Localmente, esiste base ortonormale $e^1, \ldots, e^5$ t. c.

$$\alpha = e^5 \quad \omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$$

$$\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2, e^3 + ie^4 \rangle$$

Strutture metriche quasi contatto

Una $\mathrm{U}(2)$-struttura su M^5 è

- metrica riemanniana g
- $T^*M = \langle\alpha\rangle \oplus \alpha^\perp$
- $\omega_1 \in \Omega^2$ non degenere, $\alpha \lrcorner \omega_1 = 0$.
- Struttura quasi-complessa su $\alpha^\perp$:

$$\alpha^\perp \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

Localmente, esiste base ortonormale $e^1, \ldots, e^5$ t. c.

$$\alpha = e^5 \quad \omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$$

$$\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2, e^3 + ie^4 \rangle$$

Se $c_1(\Lambda^{2,0}) = 0$, una riduzione a $\mathrm{SU}(2)$ è data da

$$\Omega^{2,0} \ni (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4)$$

Strutture metriche quasi contatto

Una $\mathrm{U}(2)$-struttura su M^5 è

- metrica riemanniana g
- $T^*M = \langle\alpha\rangle \oplus \alpha^\perp$
- $\omega_1 \in \Omega^2$ non degenere, $\alpha \lrcorner \omega_1 = 0$.
- Struttura quasi-complessa su $\alpha^\perp$:

$$\alpha^\perp \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

Localmente, esiste base ortonormale $e^1, \dots, e^5$ t. c.

$$\alpha = e^5 \quad \omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$$
$$\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2, e^3 + ie^4 \rangle$$

Se $c_1(\Lambda^{2,0}) = 0$, una riduzione a $\mathrm{SU}(2)$ è data da

$$\Omega^{2,0} \ni (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) = \omega_2 + i\omega_3$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Strutture metriche quasi contatto

Una U(2)-struttura su M^5 è

- metrica riemanniana g
- $T^*M = \langle\alpha\rangle \oplus \alpha^\perp$
- $\omega_1 \in \Omega^2$ non degenere, $\alpha \lrcorner \omega_1 = 0$.
- Struttura quasi-complessa su $\alpha^\perp$:

$$\alpha^\perp \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$$

Localmente, esiste base ortonormale $e^1, \ldots, e^5$ t. c.

$$\alpha = e^5 \quad \omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$$

$$\Lambda^{1,0} = \langle e^1 + ie^2, e^3 + ie^4 \rangle$$

Se $c_1(\Lambda^{2,0}) = 0$, una riduzione a SU(2) è data da

$$\Omega^{2,0} \ni (e^1 + ie^2) \wedge (e^3 + ie^4) = \omega_2 + i\omega_3$$

Dunque una SU(2)-struttura è definita da:

$$\begin{cases} \alpha = e^5 & \omega_1 = e^{12} + e^{34} \\ \omega_2 = e^{13} + e^{42} & \omega_3 = e^{14} + e^{23} \end{cases}$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing
- normale se $N(X, Y) = 0$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing
- normale se $N(X, Y) = 0$
- Sasaki se contatto e normale ($\implies$ K-contatto)

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing
- normale se $N(X, Y) = 0$
- Sasaki se contatto e normale ($\implies$ K-contatto)
- Einstein-Sasaki se contatto, normale e Einstein ($\implies$ $\mathrm{Ric} = 4\mathrm{Id}$)

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing
- normale se $N(X, Y) = 0$
- Sasaki se contatto e normale ($\implies$ K-contatto)
- Einstein-Sasaki se contatto, normale e Einstein ($\implies$ $\mathrm{Ric} = 4\mathrm{Id}$)

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) su M^5 determina una $\mathrm{SU}(3)$-struttura conica su $M^5 \times \mathbb{R}^+$:

$\omega = (t\alpha) \wedge dt + t^2\omega_1$ — forma di Kähler

$\Psi = (t\alpha + idt) \wedge t^2(\omega_2 + i\omega_3)$ — volume complesso

$J = \langle t\alpha + idt \rangle \oplus \Lambda^{1,0}$ — struttura quasi-complessa

Condizioni di integrabilità

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) è

- contatto se $d\alpha = -2\omega_1$
  $\iff (M^5 \times \mathbb{R}^+, \omega)$ simplettica)
- K-contatto se contatto e $\alpha^\sharp$ campo di Killing
- normale se $N(X, Y) = 0$
  $\iff (M^5 \times \mathbb{R}^+, J)$ complessa
- Sasaki se contatto e normale ($\implies K$-contatto)
  $\iff (M^5 \times \mathbb{R}^+, \omega, J)$ Kähler
- Einstein-Sasaki se contatto, normale e Einstein
  $\iff (M^5 \times \mathbb{R}^+, \omega, J, \Psi)$ Calabi-Yau

Una $\mathrm{SU}(2)$-struttura (α, ω_i) su M^5 determina una $\mathrm{SU}(3)$-struttura conica su $M^5 \times \mathbb{R}^+$:

$\omega = (t\alpha) \wedge dt + t^2\omega_1$ forma di Kähler

$\Psi = (t\alpha + idt) \wedge t^2(\omega_2 + i\omega_3)$ volume complesso

$J = \langle t\alpha + idt \rangle \oplus \Lambda^{1,0}$ struttura quasi-complessa

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà Einstein-Sasaki

Le varietà di Einstein-Sasaki semplicemente connesse sono spin e hanno curvatura scalare positiva $\Longrightarrow$ compatte.

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà Einstein-Sasaki

Le varietà di Einstein-Sasaki semplicemente connesse sono spin e hanno curvatura scalare positiva $\Longrightarrow$ compatte.

- Varietà compatte, orientate, semplicemente connesse e spin M^5 classificate da $H_2(M^5, \mathbb{Z})$ [Smale 1962].
- Metrica Einstein-Sasaki $\Longrightarrow$ restrizioni su $H_2(M, \mathbb{Z})$ [Kollàr '04].
- Per ogni $k \geq 0$, $\sharp k(S^2 \times S^3)$ ha una struttura di Einstein-Sasaki [Boyer-Galicki-Nakamaye '03, Kollàr '04].
- Ci sono altri esempi ma manca una classificazione.

Varietà Einstein-Sasaki

Le varietà di Einstein-Sasaki semplicemente connesse sono spin e hanno curvatura scalare positiva $\implies$ compatte.

- Varietà compatte, orientate, semplicemente connesse e spin M^5 classificate da $H_2(M^5, \mathbb{Z})$ [Smale 1962].
- Metrica Einstein-Sasaki $\implies$ restrizioni su $H_2(M, \mathbb{Z})$ [Kollàr '04].
- Per ogni $k \geq 0$, $\sharp k(S^2 \times S^3)$ ha una struttura di Einstein-Sasaki [Boyer-Galicki-Nakamaye '03, Kollàr '04].
- Ci sono altri esempi ma manca una classificazione.

Definition

(M, α, ω_i) è regolare se le curve integrali massimali di $\alpha^\sharp$ sono sottovarietà regolari.

Einstein-Sasaki regolare $\implies$ fibrato in cerchi su $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ o P_k, $3 \leq k \leq 8$ [Friedrich-Kath 1989].

Esempi espliciti

Esempi omogenei:

- Metrica standard sulla sfera

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$$
$$S^5 \to \mathbb{CP}^2$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Esempi espliciti

Esempi omogenei:

- Metrica standard sulla sfera

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$$
$$S^5 \to \mathbb{CP}^2$$

- Varietà di Stiefel $V_2(\mathbb{R}^4)$ [Kobayashi, Tanno]

$$\frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)} \to \frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)}$$
$$S^2\times S^3 \to \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$$

Esempi espliciti

Esempi omogenei:

- Metrica standard sulla sfera

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$$
$$S^5 \to \mathbb{CP}^2$$

- Varietà di Stiefel $V_2(\mathbb{R}^4)$ [Kobayashi, Tanno]

$$\frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)} \to \frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)}$$
$$S^2\times S^3 \to \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$$

- Nessun altro, perchè omogeneo $\implies$ regolare.

Esempi espliciti

Esempi omogenei:

- Metrica standard sulla sfera

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$$
$$S^5 \to \mathbb{CP}^2$$

- Varietà di Stiefel $V_2(\mathbb{R}^4)$ [Kobayashi, Tanno]

$$\frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)} \to \frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)}$$
$$S^2\times S^3 \to \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$$

- Nessun altro, perchè omogeneo $\implies$ regolare.

Esempi non regolari:

- $Y^{p,q}$ su $S^2\times S^3$ [Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram '04]. Coomogeneità uno, i.e. le orbite generiche del gruppo di isometrie sono ipersuperfici.

Esempi espliciti

Esempi omogenei:

- Metrica standard sulla sfera

$$\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$$
$$S^5 \to \mathbb{CP}^2$$

- Varietà di Stiefel $V_2(\mathbb{R}^4)$ [Kobayashi, Tanno]

$$\frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)} \to \frac{\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)}$$
$$S^2\times S^3 \to \mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$$

- Nessun altro, perchè omogeneo $\implies$ regolare.

Esempi non regolari:

- $Y^{p,q}$ su $S^2\times S^3$ [Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram '04]. Coomogeneità uno, i.e. le orbite generiche del gruppo di isometrie sono ipersuperfici.
- $L^{p,q,r}$ su $S^2\times S^3$ [Cvetič-Lü-Page-Pope '05] Coomogeneità due.

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Lemma

Se (G, M, α, ω_i) come sopra, si puó supporre $\pi_1(M) = 0$, $\dim G = 4$.

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a $\dim G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Lemma

Se (G, M, α, ω_i) come sopra, si puó supporre $\pi_1(M) = 0$, $\dim G = 4$.

Dimostrazione.

- Si passa al rivestimento universale.

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a $\dim G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Lemma

Se (G, M, α, ω_i) come sopra, si puó supporre $\pi_1(M) = 0$, $\dim G = 4$.

Dimostrazione.

- Si passa al rivestimento universale.
- Se $\dim G > 4$, allora $G_0 < G$ agisce con coomogeneità uno preservando la $\mathrm{SU}(2)$-struttura.

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a $\dim G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Lemma

Se (G, M, α, ω_i) come sopra, si puó supporre $\pi_1(M) = 0$, $\dim G = 4$.

Dimostrazione.

- Si passa al rivestimento universale.
- Se $\dim G > 4$, allora $G_0 < G$ agisce con coomogeneità uno preservando la $\mathrm{SU}(2)$-struttura.
- Allora le orbite hanno una $\mathrm{SU}(2) \cap \mathrm{SO}(4) = \mathbb{Z}_2$-struttura, che l'orientazione riduce a una $\{e\}$-struttura.

Riduzione a $\dim G = 4$

- Se G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki isometricamente, allora G preserva α e ω_1.
- Se G agisce con coomogeneità uno, α è tangente alle orbite. Inoltre le orbite sono orientabili.

Lemma

Se (G, M, α, ω_i) come sopra, si puó supporre $\pi_1(M) = 0$, $\dim G = 4$.

Dimostrazione.

- Si passa al rivestimento universale.
- Se $\dim G > 4$, allora $G_0 < G$ agisce con coomogeneità uno preservando la $\mathrm{SU}(2)$-struttura.
- Allora le orbite hanno una $\mathrm{SU}(2) \cap \mathrm{SO}(4) = \mathbb{Z}_2$-struttura, che l'orientazione riduce a una $\{e\}$-struttura.
- Allora $G_0 / \operatorname{Stab}(x)$ è un gruppo di dimensione 4.

Geometria delle orbite (1)

- (M, α, ω_i) K-contatto (e.g. Einstein-Sasaki).
- $\iota \colon M \to M$ ipersuperficie orientata compatta tangente ad α.

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (1)

- (M, α, ω_i) K-contatto (e.g. Einstein-Sasaki).
- $\iota\colon M \to M$ ipersuperficie orientata compatta tangente ad α.

Esiste $\{e\}$-struttura $\eta^0, \dots, \eta^3$ su M tale che

$$\eta^0 = \iota^*\alpha \qquad \eta^{23} = \iota^*\omega_1 \qquad \eta^{31} = \iota^*\omega_2 \qquad \eta^{12} = \iota^*\omega_3$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (1)

- (M, α, ω_i) K-contatto (e.g. Einstein-Sasaki).
- $\iota : M \to M$ ipersuperficie orientata compatta tangente ad α.

Esiste famiglia di $\{e\}$-strutture $\eta^0(t), \dots, \eta^3(t)$ su M t.c.

$$\eta^0(t) = \iota_t^* \alpha\ , \quad \eta^{23}(t) = \iota_t^* \omega_1\ , \quad \eta^{31}(t) = \iota_t^* \omega_2\ , \quad \eta^{12}(t) = \iota_t^* \omega_3\ ,$$

dove detto X il campo normale, localmente

$$M \times (a, b) = M$$
$$(x, t) \to \iota_t(x) = \exp_{\iota(x)}(tX)$$

e $\iota_t(M)$ tangente ad α.

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (1)

- (M, α, ω_i) K-contatto (e.g. Einstein-Sasaki).
- $\iota : M \to M$ ipersuperficie orientata compatta tangente ad α.

Esiste famiglia di $\{e\}$-strutture $\eta^0(t), \ldots, \eta^3(t)$ su M t.c.

$$\eta^0(t) = \iota_t^* \alpha \ , \quad \eta^{23}(t) = \iota_t^* \omega_1 \ , \quad \eta^{31}(t) = \iota_t^* \omega_2 \ , \quad \eta^{12}(t) = \iota_t^* \omega_3 \ ,$$

dove detto X il campo normale, localmente

$$\begin{aligned} M \times (a, b) &= M \\ (x, t) &\to \iota_t(x) = \exp_{\iota(x)}(tX) \end{aligned}$$

e $\iota_t(M)$ tangente ad α. Viceversa,

$$\alpha = \eta^0(t) \ , \qquad \omega_1 = \eta^{23}(t) + \eta^1(t) \wedge dt \ ,$$
$$\omega_2 = \eta^{31}(t) + \eta^2(t) \wedge dt \ , \qquad \omega_3 = \eta^{12}(t) + \eta^3(t) \wedge dt \ .$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (2)

- (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki se e solo se

$$d\alpha = -2\omega_1 \qquad d\omega_2 = 3\alpha \wedge \omega_3 \qquad d\omega_3 = -3\alpha \wedge \omega_2$$

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (2)

- (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki se e solo se

$$d\alpha = -2\omega_1 \qquad d\omega_2 = 3\alpha \wedge \omega_3 \qquad d\omega_3 = -3\alpha \wedge \omega_2$$

- Allora (M, η^i) soddisfa

$$d\eta^0 = -2\eta^{23} \quad d\eta^{31} = 3\eta^{012} \quad d\eta^{12} = -3\eta^{031} \qquad (*)$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (2)

- (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki se e solo se

$$d\alpha = -2\omega_1 \qquad d\omega_2 = 3\alpha \wedge \omega_3 \qquad d\omega_3 = -3\alpha \wedge \omega_2$$

- Allora (M, η^i) soddisfa

$$d\eta^0 = -2\eta^{23} \quad d\eta^{31} = 3\eta^{012} \quad d\eta^{12} = -3\eta^{031} \qquad (*)$$

- $(M, \eta^i(t))$ soddisfa le equazioni di evoluzione

$$\begin{aligned} \partial_t \eta^0 &= 2\eta^1 & \partial_t \eta^{23} &= -d\eta^1 \\ \partial_t \eta^{31} &= 3\eta^{03} - d\eta^2 & \partial_t \eta^{12} &= -3\eta^{02} - d\eta^3 \end{aligned} \qquad \text{(ev)}$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Geometria delle orbite (2)

- (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki se e solo se

$$d\alpha = -2\omega_1 \qquad d\omega_2 = 3\alpha \wedge \omega_3 \qquad d\omega_3 = -3\alpha \wedge \omega_2$$

- Allora (M, η^i) soddisfa

$$d\eta^0 = -2\eta^{23} \quad d\eta^{31} = 3\eta^{012} \quad d\eta^{12} = -3\eta^{031} \qquad (*)$$

- $(M, \eta^i(t))$ soddisfa le equazioni di evoluzione

$$\begin{aligned} \partial_t \eta^0 &= 2\eta^1 & \partial_t \eta^{23} &= -d\eta^1 \\ \partial_t \eta^{31} &= 3\eta^{03} - d\eta^2 & \partial_t \eta^{12} &= -3\eta^{02} - d\eta^3 \end{aligned} \qquad \text{(ev)}$$

- Viceversa, se (M, η^i) analitica reale soddisfa $(*)$ allora esiste soluzione di (ev) su (a, b) che determina $(M = M \times (a, b), \alpha, \omega_i)$ Einstein-Sasaki non completa.

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Spinori e ipersuperfici

- (M^5, g) semplicemente connessa è Einstein-Sasaki $\iff$ M^5 è spin ed esiste ψ spinore di Killing.

Spinori e ipersuperfici

- (M^5, g) semplicemente connessa è Einstein-Sasaki $\iff$ M^5 è spin ed esiste ψ spinore di Killing.
- (M, g) ha uno spinore di Killing $\iff$ $(M \times \mathbb{R}^+, r^2 g + dr^2)$ ha uno spinore parallelo.

$U(2)$- e $SU(2)$-strutture

Strutture metriche quasi contatto

Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki

Esempi non espliciti

Esempi espliciti

Classificazione

Riduzione a dim $G = 4$

Geometria delle orbite

Dimensioni superiori

Soluzioni di $(*)$

Soluzioni di (ev)

Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

Varietà hypo contatto

Spinori e ipersuperfici

- (M^5, g) semplicemente connessa è Einstein-Sasaki $\iff$ M^5 è spin ed esiste ψ spinore di Killing.
- (M, g) ha uno spinore di Killing $\iff$ $(M \times \mathbb{R}^+, r^2 g + dr^2)$ ha uno spinore parallelo.
- Se M^n ha uno spinore parallelo ed $M \subset M$ ipersuperficie:

n	M	M
8	Hol $= \mathrm{Spin}(7)$	G_2-struttura cocalibrata
7	Hol $= \mathrm{G}_2$	$\mathrm{SU}(3)$-struttura half-flat
6	Calabi-Yau	$\mathrm{SU}(2)$-struttura hypo

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Spinori e ipersuperfici

- (M^5, g) semplicemente connessa è Einstein-Sasaki $\iff$ M^5 è spin ed esiste ψ spinore di Killing.
- (M, g) ha uno spinore di Killing $\iff$ $(M \times \mathbb{R}^+, r^2 g + dr^2)$ ha uno spinore parallelo.
- Se M^n ha uno spinore parallelo ed $M \subset M$ ipersuperficie:

n	M	M
8	Hol $= \mathrm{Spin}(7)$	G_2-struttura cocalibrata
7	Hol $= \mathrm{G}_2$	$\mathrm{SU}(3)$-struttura half-flat
6	Calabi-Yau	$\mathrm{SU}(2)$-struttura hypo

- Se M^n ha uno spinore di Killing ed $M \subset M$ ipersuperficie:

n	M	M
7	nearly-parallel G_2	$\mathrm{SU}(3)$-struttura nearly half-flat
6	nearly-Kähler	$\mathrm{SU}(2)$-struttura nearly-hypo
5	Einstein-Sasaki	$(*)$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.

$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture

Strutture metriche quasi contatto

Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki

Esempi non espliciti

Esempi espliciti

Classificazione

Riduzione a dim $G = 4$

Geometria delle orbite

Dimensioni superiori

Soluzioni di $(*)$

Soluzioni di (ev)

Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.
$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$
- $M = G/K \subset M$ orbita, K discreto.

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.
$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$
- $M = G/K \subset M$ orbita, K discreto.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura (η^i) che soddisfa $(*)$.

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.

$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$

- $M = G/K \subset M$ orbita, K discreto.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura (η^i) che soddisfa $(*)$.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura invariante $(\tilde{\eta}^i)$:

$$\tilde{\eta}^2 + i\tilde{\eta}^3 = e^{-i\theta}(\eta^2 + i\eta^3) \quad \tilde{\eta}^0 = \eta^0 \quad \tilde{\eta}^1 = \eta^1$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.

$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$

- $M = G/K \subset M$ orbita, K discreto.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura (η^i) che soddisfa $(*)$.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura invariante $(\tilde{\eta}^i)$:

$$\tilde{\eta}^2 + i\tilde{\eta}^3 = e^{-i\theta}(\eta^2 + i\eta^3) \quad \tilde{\eta}^0 = \eta^0 \quad \tilde{\eta}^1 = \eta^1$$

Si può supporre $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$, con base di forme invarianti:

$$de^1 = -e^{23}\,, \quad de^2 = -e^{31}\,, \quad de^3 = -e^{12}\,, \quad de^4 = 0\,.$$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (1)

G agisce su (M, α, ω_i) Einstein-Sasaki preservando $\mathrm{U}(2)$-struttura. Allora:

- Esiste $e^{i\theta} : G \to \mathrm{U}(1)$ t.c.

$$L_g^*(\omega_2 + i\omega_3) = e^{-i\theta}(g)(\omega_2 + i\omega_3)$$

- $M = G/K \subset M$ orbita, K discreto.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura (η^i) che soddisfa $(*)$.
- G/K ha una $\{e\}$-struttura invariante $(\tilde\eta^i)$:

$$\tilde\eta^2 + i\tilde\eta^3 = e^{-i\theta}(\eta^2 + i\eta^3) \quad \tilde\eta^0 = \eta^0 \quad \tilde\eta^1 = \eta^1$$

Si può supporre $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$, con base di forme invarianti:

$$de^1 = -e^{23}\,, \quad de^2 = -e^{31}\,, \quad de^3 = -e^{12}\,, \quad de^4 = 0\,.$$

Allora $d\theta = me^4$, $m \in \mathbb{Z}$ e $(*)$ diventa

$$\begin{aligned} d\tilde\eta^0 = -2\tilde\eta^{23} \quad d\tilde\eta^{31} &= 3\tilde\eta^{012} + me^4 \wedge \tilde\eta^{12} \\ d\tilde\eta^{12} &= -3\tilde\eta^{031} - me^4 \wedge \tilde\eta^{31} \end{aligned} \qquad (**)$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Soluzioni di $(*)$ sulle orbite (2)

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Lemma

Ogni soluzione invariante di $(**)$ su $\mathrm{SU}(2) \times U(1)$ si scrive a meno di equivalenza come

$$\tilde\eta^0 = (hk - bc)e^1 - \frac{m}{3} e^4 \qquad \tilde\eta^1 = a\, e^1$$
$$\tilde\eta^2 = h\, e^2 \qquad \tilde\eta^3 = ce^2 + k\, e^3$$

dove h, k, a, c sono costanti arbitrarie, oppure

$$\eta^0 = 2h^2e^1 + \mu\, e^4 \qquad \eta^1 = \lambda_1 e^1 + \lambda_4 e^4$$
$$\eta^2 = h\, e^2 \qquad \eta^3 = h\, e^3$$

dove $h > 0$ e $3\lambda_1\mu = 6h^2\lambda_4 - \lambda_4 - m\lambda_1$.

Soluzioni di (ev)

Oltre alle soluzioni omogenee, si trova la metrica

$$\left(2h^2e^1 + \left(2ch^2 - \frac{c+m}{3}\right)e^4\right)^2 + h^2(e^2\otimes e^2 + e^3\otimes e^3) +$$
$$+ \frac{k + h^4 - 4h^6}{h^2}(e^1 + c\,e^4)^2 + \frac{4h^4}{k + h^4 - 4h^6} dh \otimes dh$$

Soluzioni di (ev)

Oltre alle soluzioni omogenee, si trova la metrica

$$\left(2h^2e^1+\left(2ch^2-\frac{c+m}{3}\right)e^4\right)^2+h^2(e^2\otimes e^2+e^3\otimes e^3)+$$
$$+\frac{k+h^4-4h^6}{h^2}(e^1+c\,e^4)^2+\frac{4h^4}{k+h^4-4h^6}dh\otimes dh$$

Theorem (A)

La soluzione si estende a una metrica su una varietà compatta M se e solo se

$$k+\rho^2-4\rho^3=0$$

ha radici distinte ρ_1, ρ_2 t.c.

$$\frac{1}{m+c}\,\frac{6\rho_i}{1-6\rho_i}\in\mathbb{Q}\,.$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G=4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Conclusione

- Per $m = 0$, si trovano le metriche $Y^{p,q}$.
- Quasi-regolare $\iff$ $c \in \mathbb{Q}$.
- Per infiniti $-\frac{1}{108} < k < 0$ e ogni $m \in \mathbb{Z}$ esiste c tale che il Teorema A è soddisfatto [Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram].
- Dalla classificazione di Smale, segue che M è diffeomorfa a $S^2 \times S^3$.

Conclusione

- Per $m = 0$, si trovano le metriche $Y^{p,q}$.
- Quasi-regolare $\iff c \in \mathbb{Q}$.
- Per infiniti $-\frac{1}{108} < k < 0$ e ogni $m \in \mathbb{Z}$ esiste c tale che il Teorema A è soddisfatto [Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram].
- Dalla classificazione di Smale, segue che M è diffeomorfa a $S^2 \times S^3$.

Theorem (B)

Se M è una varietà di Einstein-Sasaki su cui un gruppo di Lie agisce isometricamente con coomogeneità uno, allora il rivestimento universale di M è uno tra

- S^5 *con la metrica standard;*
- $V_2(\mathbb{R}^4)$ *con la metrica di Kobayashi-Tanno;*
- $S^3 \times S^2$ *con una metrica del Teorema A.*

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

- (M, α, ω_i) è hypo se

$$d\omega_1 = 0 \quad d(\alpha \wedge \omega_2 = 0) \quad d(\alpha \wedge \omega_3) = 0$$

Cohomogeneity one Einstein-Sasaki 5-manifolds

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità

Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti

Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

- (M, α, ω_i) è hypo se

$$d\omega_1 = 0 \quad d(\alpha \wedge \omega_2 = 0) \quad d(\alpha \wedge \omega_3) = 0$$

- Hypo analitiche reali $=$ ipersuperfici in 6-varietà di Calabi-Yau (Conti-Salamon '06).

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

- (M, α, ω_i) è hypo se

$$d\omega_1 = 0 \quad d(\alpha \wedge \omega_2 = 0) \quad d(\alpha \wedge \omega_3) = 0$$

- Hypo analitiche reali $=$ ipersuperfici in 6-varietà di Calabi-Yau (Conti-Salamon '06).

Theorem

Sono equivalenti:

- (M, α, ω_i) *hypo e* K*-contact;*
- (M, α, ω_i) *Sasaki e* $\mathrm{Ric} = (4 - 2a)g + 2a\, \alpha \otimes \alpha$, $a \in \mathbb{R}$;
- (M, α, ω_i) *contatto e* $d\omega_2 = (3 - a)\alpha \wedge \omega_3$, $d\omega_3 = -(3 - a)\alpha \wedge \omega_2$, $a \in C^\infty(M)$.

Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki

- (M, α, ω_i) è hypo se

$$d\omega_1 = 0 \quad d(\alpha \wedge \omega_2 = 0) \quad d(\alpha \wedge \omega_3) = 0$$

- Hypo analitiche reali = ipersuperfici in 6-varietà di Calabi-Yau (Conti-Salamon '06).

Theorem

Sono equivalenti:

- (M, α, ω_i) *hypo e K-contact;*
- (M, α, ω_i) *Sasaki e* Ric $= (4 - 2a)g + 2a\, \alpha \otimes \alpha$, $a \in \mathbb{R}$;
- (M, α, ω_i) *contatto e* $d\omega_2 = (3 - a)\alpha \wedge \omega_3$, $d\omega_3 = -(3 - a)\alpha \wedge \omega_2$, $a \in C^\infty(M)$.

Si dice allora che (M, α, ω_i) è α-Einstein-Sasaki. Se $a < 3$, $(\lambda\alpha, \lambda\omega_i)$ è Einstein-Sasaki per $\lambda = 1 - a/3$.

U(2)- e SU(2)-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno

Theorem (C)

Se (α, ω_i) è struttura hypo contatto su M compatta semplicemente connessa, e G agisce su M con coomogeneità uno preservando (α, ω_i), allora (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki a meno di $\mathcal{D}$-omotetia, e vale il Teorema A.

Dimostrazione.

- α è tangente alle orbite $\implies$ K-contact.

$\square$

$\mathrm{U}(2)$- e $\mathrm{SU}(2)$-strutture
Strutture metriche quasi contatto
Condizioni di integrabilità
Varietà Einstein-Sasaki
Esempi non espliciti
Esempi espliciti
Classificazione
Riduzione a dim $G = 4$
Geometria delle orbite
Dimensioni superiori
Soluzioni di $(*)$
Soluzioni di (ev)
Conclusione
Varietà hypo contatto di coomogeneità uno
Varietà hypo e α-Einstein-Sasaki
Varietà hypo contatto

Varietà hypo contatto di coomogeneità uno

Theorem (C)

Se (α, ω_i) è struttura hypo contatto su M compatta semplicemente connessa, e G agisce su M con coomogeneità uno preservando (α, ω_i), allora (M, α, ω_i) è Einstein-Sasaki a meno di $\mathcal{D}$-omotetia, e vale il Teorema A.

Dimostrazione.

- α è tangente alle orbite $\implies$ K-contact.
- Si scrivono equazioni analoghe a $(*)$ e (ev).
- Come Teorema A.

$\square$