Definizione 1 La varietà (M^{4n}, g), $n \geq 2$, è Quaternion Kähler(qK) se $Hol \subseteq Sp(n) \cdot Sp(1) \subset SO(4n)$. In tal caso segue che (M^{4n}, g) è Einstein.

Osservazione 1 Nel caso $n = 1$, $Sp(1) \cdot Sp(1) \cong SO(4)$. Quindi abbiamo bisogno di una diversa, altrimenti:

$$(M^4, g) \; orientabile \iff M^4 \; qK.$$

Definizione 2

$$(M^4, g) \;\; qK \iff g \;\; Self \; Dual \; Einstein(SDE).$$

Una delle ragioni di tale definizione è la seguente:

Sia (M^{4n}, g) qK con G gruppo che agisce per isometrie, in modo da assicurare la riduzione quaternionale Kähleriana

$$M^{4n} \supseteq \mu^{-1}(0) \quad \Rightarrow \quad \mu^{-1}(0)/G \quad qK.$$

Se $dim\ \mu^{-1}(0)/G = 4$ vale che N^4 è SDE.

Teorema 1 (Hitchin, 1974) N^4 compatta SDE con curvatura scalare $s > 0$. Allora $N^4 \cong S^4$ oppure $N^4 \cong \mathbb{CP}^2$.

Tuttavia il precedente teorema non vale nel caso di varietà singolari, quindi è una questione interessante quella di trovare esempi di varietà qK 4-dimensionali, singolari, compatte e con $s > 0$. Per esempio, spazi proiettivi $\mathbb{CP}^2$ con pesi si possono ottenere usando riduzioni qK.

I quozienti dovuti a riduzioni 3-Sasakiane e qK, sono legati tra di loro dalla seguente catena di fibrazioni

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{C}(\mathcal{S}^{4n+3}) & \text{Cono HyperKähleriano} \\
\downarrow\mathbb{R}^{+} & \\
\mathcal{S}^{4n+3} & \text{Fibrato 3 -- Sasakiano} \\
\downarrow S^{1} & \\
\mathcal{Z}^{4n+2} & \text{Twistors} \\
\downarrow S^{2} & \\
\mathcal{N}^{4n} & \text{Quaternion -- Kähler.}
\end{array}
$$

Per esempio , le riduzioni dovute all'azione diagonale di $U(1) \cong T^1$ sullo spazio $\mathbb{H}^{n+1}$

$$U(1) \times \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1},$$

$$(\tau, \underline{z} + \boldsymbol{j}\underline{w}) \mapsto (\tau\underline{z} + \boldsymbol{j}\overline{\tau}\underline{w})$$

e a quella per moltiplicazione a sinistra di $Sp(1) \subset Sp(n+1)$ sempre su $\mathbb{H}^{n+1}$

$$Sp(1) \times \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{H}^{n+1},$$

$$(\lambda, \underline{u}) \longmapsto \lambda\underline{u}$$

possono essere rappresentate dal seguente grafico:

	Riduzione con $U(1)$	Riduzione con $Sp(1)$
$\mathbb{H}^{n+1}$	$\mathbf{C}\left(\frac{SU(n+1)}{S(U(n-1)\times U(1))}\right)$	$\mathbf{C}\left(\frac{SO(n+1)}{SO(n-3)\times Sp(1)}\right)$
$\downarrow_{\mathbb{R}^+}$	$\downarrow$	$\downarrow$
S^{4n+3}	$\frac{SU(n+1)}{S(U(n-1)\times U(1))}$	$\frac{SO(n+1)}{SO(n-3)\times Sp(1)}$
$\downarrow_{S^1}$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{CP}^{2n+1}$	$\frac{SU(n+1)}{S(U(n-1)\times U(1))\times U(1)}$	$\frac{SO(n+1)}{SO(n-3)\times Sp(1)\times U(1)}$
$\downarrow_{S^2}$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{HP}^n$	$Gr_2(\mathbb{C}^{n+1})$	$Gr_4(\mathbb{R}^{n+1})$

In particolare, possiamo considerare le riduzioni dovute all'azione di tori T_{Θ}^{n-1} su $\mathbb{HP}^n$, dove Θ è una matrice di pesi. In tal caso si ottengono orbifolds $\{\mathcal{O}\}$ di dimensione 4 dette "toriche".

Teorema 2 (Boyer-Galicki-Mann-Rees, 1998)

Esistono orbifolds $(\mathcal{O}^4, h)$ compatte, SDE, $s > 0$ tali che il loro gruppo di isometrie sia T^2 e con il secondo numero di Betti arbitrario.

Teorema 3 (Bielawski, 99;Calderbank-Singer,04)

Sia $(\mathcal{O}^4, h)$ orbifold compatta, SDE con $s > 0$ e due campi di Killing che commutano fra di loro. Allora $(\mathcal{O}^4, h)$ può essere ottenuta come quoziente di $\mathbb{HP}^n$ per l'azione di un toro T_{Θ}^{n-1}.

Problema :

Esistono orbifolds $(\mathcal{O}^4, h)$ compatte, SDE, $s > 0$ e che abbiano gruppo di isometrie 1−dimensionale?

Un possibile approccio per dare una risposta al precedente problema, si ha combinando le azioni di $Sp(1)$ e $U(1)$ su $\mathbb{HP}^{n+1}$, si possono creare interessanti esempi di orbifolds con gruppo di isometrie 1-dimensionale. In particolare, assumiamo $n = 6$ e consideriamo l'azione diagonale di $U(1)$ sul cono HyperKähleriano $\mathbf{C}\left(\frac{SO(7)}{SO(3)\times Sp(1)}\right)$ legato all'azione di $Sp(1)$. Vale il seguente

Teorema 4 (Kobak-Swann, 1993) Il sottogruppo diagonale

$$U(1) \subset U(3) \subset SO(6) \subset SO(7),$$

agisce su $Gr_4(\mathbb{R}^7)$ e il quoziente qK è un orbifold $\mathbb{Z}_3 \backslash G_2/SO(4)$. $\Box$

Insieme al relativo quoziente 3-Sasakiano, il precedente risultato può essere descritto come segue:

$$
\begin{array}{ccccc}
S^{27} & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \overbrace{\dfrac{SO(7)}{SO(3)\times Sp(1)}}^{\mathcal{S}^{15}\cong} & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_3\backslash G_2/Sp(1) \\
\downarrow^{SO(3)} & & \downarrow^{SO(3)} & & \downarrow^{SO(3)} \\
\mathbb{HP}^6 & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \underbrace{\dfrac{SO(7)}{SO(3)\times SO(4)}}_{\cong Gr_4(\mathbb{R}^7)} & \overset{U(1)}{\Longrightarrow} & \mathbb{Z}_3\backslash G_2/SO(4)
\end{array}
$$

Questo quoziente può essere deformato introducendo dei pesi per l'azione di $U(1)$ ed in tal modo si ottengono interessanti ulteriori generalizzazioni.

Adesso prendiamo in esame le seguenti azioni dei tori $T^1 \cong U(1)$ e T^2:

• Consideriamo l'azione diagonale di $U(1) \cong T^1 \subset SO(7)$ su S^{27} e introduciamo il vettore di pesi

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3.$$

Possiamo così definire le matrici

$$A(p_\alpha t) = \begin{pmatrix} cos(p_\alpha t) & sin(p_\alpha t) \\ -sin(p_\alpha t) & cos(p_\alpha t) \end{pmatrix},$$

e

$$A_{\mathbf{p}}(t) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & A(p_1 t) & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & A(p_2 t) & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & \underline{0} & A(p_3 t) \end{array}\right).$$

che determinano una nuova azione di T^1 su S^{27}.

• Analogamente, possiamo considerare l'azione diagonale del 2-toro $U(1) \times U(1) \cong T^2 \subset SO(7)$ sulla sfera $S^{27} \subset \mathbb{H}^7$. Per ogni matrice di pesi

$$\Theta := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

è definita l'azione di T^2 su S^{27}, indotta dal seguente omomorfismo:

$$f : [0, 2\pi)^2 \to T^3 \subset SO(7),$$

$$f(t,s) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & A_1(t,s) & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & A_2(t,s) & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & \underline{0} & A_3(t,s) \end{array}\right) \in T^3,$$

dove

$$A_\alpha(t,s) := \begin{pmatrix} cos(p_\alpha t + q_\alpha s) & sin(p_\alpha t + q_\alpha s) \\ -sin(p_\alpha t + q_\alpha s) & cos(p_\alpha t + q_\alpha s) \end{pmatrix}.$$

Vale il seguente risultato

Teorema 5 (Boyer-Galicki-Piccinni, 2002)

• Per ogni vettore di pesi $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3$ è possibile definire un'azione per isometrie del gruppo $Sp(1)\times U(1)_{\mathbf{p}}$ sulla sfera $S^{27} \subset \mathbb{H}^7$. In particolare se $0 < p_1 < p_2 < p_3$ e $mcd(p_1 \pm p_2, p_1 \pm p_3) = 1$ allora tramite riduzione otteniamo i seguenti quozienti

$$\begin{array}{ccccc} S^{27} & \rightarrow & \mathbb{CP}^{13} & \rightarrow & \mathbb{HP}^6 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{M}^{11} & \rightarrow & \mathcal{Z}^{10} & \rightarrow & \mathcal{O}^8(\Theta) \end{array}$$

dove $\mathcal{M}^{11}$ è una varietà 3-Sasakiana liscia e $\mathcal{O}^8(\Theta)$ è la sua qK orbifol non torica.

• Sia $\Theta \in M_{2\times 3}(\mathbb{Z})$ (matrice dei pesi) tale che tutti i suoi minori 2×2 non si annullino. Supponiamo anche che la somma di tali tre minori non sia nulla e che ognuno di questi minori sia diverso dalla somma degli altri due. Allora per ogni tale matrice Θ, il quoziente qK di $\mathbb{HP}^6$ per l'azione di $Sp(1) \times T^2_{\mathbf{\Theta}}$ è un orbifold $\mathcal{O}^4$ 4-dimensionale, compatta, SDE, non torica e con gruppo di isometrie 1-dimensionale. $\square$

Osserviamo che azioni del tipo precedentemente descritto possono essere definite su qualsiasi Grassmanniana qK

$$Gr_4(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \frac{SO(n+1)}{SO(n-3) \times SO(4)}.$$

Poichè $dim_{\mathbb{R}}\, Gr_4(\mathbb{R}^{n+1}) = 4(n-3)$, affinchè tramite riduzione si ottenga per quoziente un orbifold $\mathcal{O}^4$ 4-dimensionale, è necessario usare l'azione di un toro T^{n-4}. Dato che il toro massimale di $SO(n+1)$ ha $dim = [\frac{n+1}{2}]$, allora per avere un azione con pesi per il toro T^{n-4}, deve valere che

$$n - 4 < [\frac{n+1}{2}].$$

Allora, a seconda del fatto che $n + 1$ sia pari o dispari, abbiamo

$$\begin{array}{ccc} n - 4 < \frac{n+1}{2} & & n - 4 < \frac{n}{2}. \\ & \text{oppure} & \\ n < 9 & & n < 8 \\ (n \text{ dispari}) & & (n \text{ pari}) \end{array}$$

Quindi i soli casi possibili sono:

$$\begin{array}{lll} Gr_4(\mathbb{R}^6), & Gr_4(\mathbb{R}^7), & Gr_4(\mathbb{R}^8). \\ \quad \| & \quad \downarrow & \quad \downarrow \\ Gr_2(\mathbb{C}^4) & \text{Boyer,} & \text{mia tesi} \\ \quad \downarrow & \text{Galicki,} & \\ \text{Boyer,} & \text{Piccinni,} & \\ \text{Galicki,} & & \\ \text{Mann,} & & \\ \text{Piccinni,} & & \end{array}$$

Prendiamo in considerazione il caso legato alla Grassmanniana $Gr_4(\mathbb{R}^8)$. A partire da riduzioni qK legate ad azioni isometriche del 3-toro $T^3 \subset T^4 \subset SO(8)$ $\subset Sp(8)$, è possibile costruire nuovi esempi di orbifolds $\mathcal{O}^4(\Theta)$ 4-dimensionali che ammettono gruppo di isometrie 1-dimensionale.

Consideriamo l'azione del gruppo $Sp(1) \times T^3_\Theta \subset Sp(8)$ sulla sfera $S^{31} \subset \mathbb{H}^8$; dove $Sp(1)$ agisce per moltiplicazione a sinistra, mentre l'azione di $T^3_\Theta \subset SO(8)$ è definita tramite le matrici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1(t,s,r) & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & A_2(t,s,r) & \underline{0} & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & A_3(t,s,r) & \underline{0} \\ \hline 0 & \underline{0} & \underline{0} & A_4(t,s,r) \end{array}\right) \in T^4,$$

dove

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} cos(p_\alpha t + q_\alpha s + l_\alpha r) & sin(p_\alpha t + q_\alpha s + l_\alpha r) \\ -sin(p_\alpha t + q_\alpha s + l_\alpha r) & cos(p_\alpha t + q_\alpha s + l_\alpha r) \end{pmatrix}.$$

e i pesi sono raccolti nella matrice

$$\Theta := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{pmatrix},$$

In questo caso i quozienti che si ottengono per riduzione 3-Sasakiano-qK sono

$$\begin{array}{ccccc} S^{31} & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \overbrace{\dfrac{SO(8)}{SO(4)\times Sp(1)}}^{\mathcal{S}^{15}\cong} & \overset{T^3_\Theta}{\Longrightarrow} & \mathcal{M}^7 \\ \downarrow^{SO(3)} & & \downarrow^{SO(3)} & & \downarrow^{SO(3)} \\ \mathbb{HP}^6 & \overset{Sp(1)}{\Longrightarrow} & \underbrace{\dfrac{SO(8)}{SO(4)\times SO(4)}}_{Gr_4(\mathbb{R}^8)\cong} & \overset{T^3_\Theta}{\Longrightarrow} & \mathcal{O}^4(\Theta) \end{array}$$

Vale il seguente risultato

Teorema 6 Sia $\Theta \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z})$ matrice non nulla, tale che tutti i suoi minori 3×3

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma} := \begin{vmatrix} p_\alpha & q_\alpha & l_\alpha \\ p_\beta & q_\beta & l_\beta \\ p_\gamma & q_\gamma & l_\gamma \end{vmatrix} \neq 0, \text{ dove } 1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 4,$$

non si annullino. Inoltre supponiamo che i minori determinanti $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ siano tali che i determinanti

$$^{1\pm 2}\square^{1\pm 4}_{1\pm 3} := \begin{vmatrix} p_1 \pm p_2 & q_1 \pm q_2 & l_1 \pm l_2 \\ p_1 \pm p_3 & q_1 \pm q_3 & l_1 \pm l_3 \\ p_1 \pm p_4 & q_1 \pm q_4 & l_1 \pm l_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

non siano mai nulli. Allora per ogni matrice Θ con tali proprietà esiste un orbifold 4-dimensionale $\mathcal{O}^4(\Theta)$, compatta, SDE, $s > 0$ e con gruppo di isometrie 1-dimensionale.$\square$

Passi della dimostrazione

Consideriamo le mappe momento 3-Sasakiane μ e ν legate rispettivamente all'azione di $Sp(1)$ e a quella di di $T^3_\Theta \cong U(1) \times U(1) \times U(1)$ su S^{31}. La mappa momento $\mu : S^{31} \to \mathfrak{sp}(1) \otimes \mathbb{R}^3$ relativa a $Sp(1)$ è la seguente

$$\mu(\boldsymbol{u}) = \Big(\sum_{\alpha=1}^{8} \overline{u}_\alpha \boldsymbol{i} u_\alpha, \ \sum_{\alpha=1}^{8} \overline{u}_\alpha \boldsymbol{j} u_\alpha, \ \sum_{\alpha=1}^{8} \overline{u}_\alpha \boldsymbol{k} u_\alpha \Big),$$

dove $\boldsymbol{u}$ è un elemento di S^{31}. La mappa momento $\nu : S^{31} \to \mathfrak{u}(1)^3 \otimes \mathbb{R}^3$ per T^3_Θ è definita da

$$\nu(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \sum_{\beta=1}^{4} p_\beta \Big(\overline{u}_{2\beta-1} u_{2\beta} - \overline{u}_{2\beta} u_{2\beta-1} \Big) \\ \sum_{\beta=1}^{4} q_\beta \Big(\overline{u}_{2\beta-1} u_{2\beta} - \overline{u}_{2\beta} u_{2\beta-1} \Big) \\ \sum_{\beta=1}^{4} l_\beta \Big(\overline{u}_{2\beta-1} u_{2\beta} - \overline{u}_{2\beta} u_{2\beta-1} \Big) \end{pmatrix}.$$

Usando l'espressioni delle mappe momento μ e ν si prova:

Lemma 1 Consideriamo $N = \nu^{-1}(0) \cap \mu^{-1}(0) \subset S^{31} \subset \mathbb{H}^8$. Gli elementi $\mathbf{u} \in N$ possono essere pensati come matrici complesse 4×8

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \right).$$

Supponiamo che tutti i minori determinanti $\{\Delta_{\alpha\beta\gamma}\}$ non siano mai nulli. Allora ogni elemento $\boldsymbol{u} \in N$ è tale che nessuna delle sue coppie quaternioniche $(u_{2\alpha-1}, u_{2\alpha})$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ si annulli. $\square$

Grazie a questo fatto e allo studio delle equazioni di punto fisso, possiamo concludere che l'azione del gruppo $G = Sp(1) \times T^3_{\Theta}$ su N non è mai libera. Infatti valgono:

Proposizione 1 L'azione di $G = Sp(1) \times T^3$ su N è localmente libera se e solo se tutti i minori determinanti $\{\Delta_{\alpha\beta\gamma}\}$ e ${}^{1\pm2}\Box^{1\pm3}_{1\pm4}$ non sono mai nulli. Inoltre l'azione è libera se e solo se tutti i determinanti ${}^{1\pm2}\Box^{1\pm3}_{1\pm4} = \pm 1.\Box$

Proposizione 2 Non esiste alcuna matrice di pesi $\Theta \in M_{3\times4}(\mathbb{Z})$ tale che tutti e otto i determinanti ${}^{1\pm2}\Box^{1\pm3}_{1\pm4} = \pm 1$; cioè l'azione di $G = Sp(1) \times T^3$ su N non è mai libera. $\Box$

Corollario 1 Per ogni matrice $\Theta \in M_{3\times4}(\mathbb{Z})$ che verifica le proprietà della Proposizione 1. Il quoziente ottenuto per riduzione sarà un orbifold con singolarità dipendenti dai valori assunti dai determinanti $^{1\pm2}\square^{1\pm3}_{1\pm4}$. $\square$

Esempio 1 Un esempio di matrice $\Theta \in M_{3\times4}(\mathbb{Z})$ che verifica le proprietà del Teorema 6 è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando il fatto che esiste una corrispondenza biunivoca fra varietà qK positive ed il loro spazio dei twistor, possiamo studiare i luoghi singolari dell'orbifold $\mathcal{O}^4(\Theta)$ focalizzando la nostra attenzione sullo spazio dei twistor $\mathcal{Z}^6(\Theta)$. Riferendoci alla fibrazione

$$\mathcal{M}^7 \xrightarrow{U(1)} \mathcal{Z}^6(\Theta) \xrightarrow{S^2} \mathcal{O}^4(\Theta),$$

abbiamo che tale spazio dei twistor può essere pensato come il quoziente

$$\mathcal{Z}^6(\Theta) = Sp(1) \times T^3_\Theta \backslash \Big(\mu^{-1}(0) \cap \nu^{-1}(0)\Big) / U(1),$$

dovuto all'azione del gruppo $\tilde{G} = Sp(1) \times T^3_\Theta \times U(1)$ su N.

Lemma 2 *I luoghi singolari relativi all' azione di* $\tilde{G} = Sp(1) \times T^3_\Theta \times U(1)$ *su* N *non si intersecano tra di loro.*

Teorema 7 *Fissata la matrice dei pesi* Θ*, si prova che esiste un solo luogo singolare* Σ *che dipende da uno solo dei determinanti* ${}^{1\pm2}\square^{1\pm3}_{1\pm4}$ *e dai minori determinanti* $\{\Delta_{\alpha\beta\gamma}\}$ *.*

Supponiamo per esempio che tale luogo singolare Σ dipenda da ${}^{1-2}\square^{1+3}_{1+4}$, allora esso viene completamente descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} 2|u_1|^2 = \frac{-\Delta_{234}}{1-2\Box^{1+3}_{1+4}}, \\ 2|u_3|^2 = \frac{\Delta_{134}}{1-2\Box^{1+3}_{1+4}}, \\ 2|u_5|^2 = \frac{\Delta_{124}}{1-2\Box^{1+3}_{1+4}}, \\ 2|u_7|^2 = \frac{-\Delta_{123}}{1-2\Box^{1+3}_{1+4}}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4}(|z_{2i-1}|^2 - |w_{2i-1}|^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} \overline{w}_{2i-1} z_{2i-1} = 0. \end{cases}$$