CLEC - A/A 2019/20 - 8/6/20

Esame integrato di

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

+

LABORATORIO DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

I PRIMI TRE ESERCIZI SONO DI SOGLIA E DANNO UN PUNTEGGIO MASSIMO DI 21. SI VIENE AMMESSI ALL'ORALE SOLO SE SI RIPORTA UN PUNTEGGIO DI ALMENO 17 NEI PRIMI TRE ESERCIZI. GLI ULTIMI DUE ESERCIZI VENGONO CORRETTI SOLO IN QUESTO CASO E DANNO UN PUNTEGGIO MASSIMO DI 14.

Il voto è il piu' piccolo tra il punteggio totale e 30.

LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE

Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) La probabilita' che una persona contragga il Covid 19 e muoia e' dello 0,0034% nella popolazione da 0 a 59 anni, dello 0,0446% nella popolazione da 60 a 69 anni, e dello 0,2634% nella popolazione con 70 anni o piu' (dati al 28/5/2020). Il 70,79% della popolazione cade nella fascia d'eta' 0-59 anni, il 12,16% nella fascia 60-69 anni e il 17,05% nella fascia da 70 anni in su.

a) Qual e' la probabilita' che una persona scelta a caso nella popolazione complessiva contragga il virus e muoia? **R: 0,0529%**

b) Se una persona muore per il Covid 19, qual e' la probabilita' che abbia un'eta' minore o uguale a 59 anni? **R: 4,549%**

2) Uno studente sostiene un test composto da 5 domande a risposta multipla. Piu' precisamente ogni domanda ha 4 risposte possibili, di cui una sola corretta. Lo studente non e' preparato e risponde completamente a caso. Lo studente supera il test se risponde correttamente ad almeno 3 domande.

a) Qual e' la probabilita' che lo studente superi il test? **R: 0,103516**

b) Qual e' la probabilita' che lo studente non lo superi? **R: 0,896484**

c) Se gli studenti sono 2 e rispondono entrambi a caso, indipendentemente l'uno dall'altro, qual e' la probabilita' che almeno uno dei due superi il test? **R: 0,196316**

3) Siano

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sia (X, Y) una coppia di v.a. gaussiane con vettore delle medie μ e matrice di covarianza C.

Scrivere la densita' di probabilita' di (X, Y). **R.** $\frac{1}{6\pi} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{4}{3}^{x2}\}$

4) La quotazione in borsa del titolo di un'azienda automobilistica ogni settimana puo' salire con probabilita' $0,75$, o scendere con probabilita' $0,25$, indipendentemente da quanto accade in tutte le altre settimane.

Un'azienda di componentistica automobilistica e' anch'essa quotata in borsa; il prezzo del suo titolo ogni settimana, indipendentemente da quanto accade in tutte le altre settimane, puo' salire o scendere: in ogni settimana, se il prezzo del titolo dell'azienda automobilistica sale, la probabilita' che anche il prezzo del titolo dell'azienda di componentistica salga e' $0,8$; se invece il prezzo del titolo dell'azienda automobilistica scende, la probabilita' che anche il prezzo del titolo dell'azienda di componentistica scenda e' $0,6$.

a) In ogni settimana, calcolare la probabilita' che il prezzo del titolo dell'azienda di componentistica salga (senza avere informazioni sull'azienda automobilistica). **R: 0,7**

Sia X_1 il numero di settimane in cui il prezzo del titolo dell'azienda automobilistica e' salito e X_2 il numero di settimane in cui il prezzo del titolo dell'azienda di componentistica e' salito.

b) Scrivere la densita' discreta di probabilita' di X_1; scrivere la densita' discreta di probabilita' di X_2. **R: detto n il numero delle settimane, sono binomiali di parametri $p = 0,75$ ed n, e $p = 0,7$ ed n, rispettivamente**

c) Considerando 2 settimane, calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 2|X_1 = 2)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 0|X_1 = 0)$. **R: 0,64 e 0,36**

d) X_1 e X_2 sono correlate? Se si', positivamente o negativamente? Rispondere senza effettuare calcoli, ma motivando la risposta. **R: correlate positivamente, perche' piu' volte sale il titolo dell'azienda automobilistica (X_1 assume un valore alto), piu' e' probabile che anche il titolo dell'azienda di componentistica sia salito varie volte (X_2 assuma un valore alto).**

5) Siano X e Y due variabili aleatorie e sia, per ogni fissato $x > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathbf{I}_{(x,\infty)}(y) e^{-(y-x)}.$$

Sia inoltre

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x).$$

a) Calcolare la densita' di probabilita' marginale della variabile Y (suggerimento: $\mathbf{I}_{(x,\infty)}(y)\, \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) = \mathbf{I}_{(0,\infty)}(y)\, \mathbf{I}_{(0,y)}(x)$). **R:** $f_Y(y) = y e^{-y} \mathbf{I}_{(0,\infty)}(y)$

b) Calcolare $\mathbf{P}(Y > 1 | X = \frac{1}{2})$. **R:** $\frac{1}{\sqrt{e}}$