CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2018/19
20/2/20

Ai primi tre esercizi sono attribuiti 21 punti. PER SUPERARE LO SCRITTO OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 17 NEI PRIMI TRE ESERCIZI. Gli esercizi 4) e 5) verranno corretti solo se si sara' raggiunto un punteggio di almeno 17 nei primi tre esercizi.
LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE
Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) La probabilita' che un bambino nasca con una certa grave malformazione e' dell'1%. La malformazione puo' essere diagnosticata con un test prenatale. I livelli di attendibilita' del test sono i seguenti: se il bambino ha la malformazione, il test e' positivo (cioe' indica che la malformazione c'e') con probabilita' del 98%; se il bambino non ha la malformazione, il test e' negativo (cioe' indica che la malformazione non c'e') con probabilita' del 90%.

a) Se il risultato del test e' positivo, qual e' la probabilita' che il bambino abbia la malformazione?

b) Se il risultato del test e' negativo, qual e' la probabilita' che il bambino abbia la malformazione?

2) Si lancia 6 volte una moneta equa.

a) Qual e' la probabilita' di avere esattamente 2 teste nei primi 3 lanci?

b) Gli eventi: "avere esattamente 2 teste nei primi 3 lanci" e "avere esattamente 2 teste nei successivi 3 lanci" sono indipendenti?

c) Qual e' la probabilita' di avere esattamente 2 teste nei primi 3 lanci ed esattamente 2 teste nei successivi 3 lanci?

d) Qual e' la probabilita' di avere esattamente 2 teste nei primi 3 lanci e almeno 2 teste nei successivi 3 lanci?

e) Qual e' la probabilita' di avere esattamente 2 teste nei primi 3 lanci e almeno 4 teste complessivamente nei 6 lanci?

3) Siano X e Y due variabili aleatorie congiuntamente Gaussiane di media, rispettivamente, 1 e 0 e matrice di covarianza

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siano inoltre

$$\begin{cases} U = X - 2Y \\ V = X + Y. \end{cases}$$

a) Calcolare $\mathrm{Var}[U]$, $\mathrm{Var}[V]$, $\mathrm{Cov}[U, V]$.

b) Scrivere la densita' di probabilita' congiunta di U e V.

4) Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con densita' discreta di probabilita':

$$\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}.$$

Sia

$$Z = max(X, Y),$$

cioe' il valore di Z e' il piu' grande tra il valore di X e quello di Y.

a) Calcolare la densita' discreta di probabilita' di Z.

b) Calcolare la densita' discreta di probabilita' congiunta di X e Z.

5) Sia Y una variabile aleatoria con densita' di probabilita'

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{I}_{(0,\infty)}(y),$$

e sia X un'altra variabile aleatoria con densita' condizionata a Y

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2}}, \qquad \text{per } y > 0.$$

a) Quanto vale $\mathbf{E}[\mathbf{X}|Y = y]$, per $y > 0$? (Si puo' rispondere anche senza effettuare calcoli, osservando la forma di $f_{X|Y}(x|y)$)

b) Calcolare $\mathbf{E}[\mathrm{X}]$.