

**CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2018/19**  
**24/6/19**

**Ai primi tre esercizi sono attribuiti 21 punti. PER SUPERARE LO SCRITTO OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 17 NEI PRIMI TRE ESERCIZI.** Gli esercizi 4) e 5) verranno corretti solo se si sarà raggiunto un punteggio di almeno 17 nei primi tre esercizi.

**LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE**

**Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.**

1) Ci sono due urne: l'urna 1 contiene 6 palline bianche e 4 rosse; l'urna 2 ne contiene 3 bianche e 7 rosse. Si estrae una pallina da ciascuna urna e, senza guardarle, si scambiano, cioè si mette nell'urna 1 la pallina estratta dall'urna 2 e viceversa.

a) Qual è la probabilità che le due palline estratte fossero entrambe rosse? Qual è la probabilità che le due palline estratte fossero entrambe bianche? Qual è la probabilità che la pallina estratta dall'urna 1 fosse bianca e quella estratta dall'urna 2 fosse rossa? Qual è la probabilità che la pallina estratta dall'urna 1 fosse rossa e quella estratta dall'urna 2 fosse bianca?

b) Dopo aver effettuato lo scambio, si estrae una pallina dall'urna 1: qual è la probabilità che sia rossa?

c) Se la pallina estratta al punto b) risulta rossa, qual è la probabilità che le due palline che sono state scambiate inizialmente fossero entrambe rosse?

2) Siano  $U$  e  $V$  due variabili aleatorie con densità di probabilità discreta congiunta data dalla seguente tabella:

$U$	-2	-1	0	3
$V$				
-2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

a) Calcolare le densità discrete marginali di  $U$  e  $V$ .  $U$  e  $V$  sono indipendenti?

b) Calcolare  $\mathbf{E}[U]$  ed  $\mathbf{E}[V]$ .

c) Calcolare  $\mathbf{E}[UV]$ .

d) Calcolare la probabilità che  $V$  sia strettamente maggiore di  $U$ .

3) Consideriamo la densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e}{2\sqrt{x+1}} e^{-\sqrt{x+1}}, & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare la funzione di distribuzione corrispondente ad  $f$ .

4) Una banca divide i suoi clienti in tre classi di merito. Se riceve un finanziamento, un cliente della prima classe lo rimborsa completamente nei tempi previsti con il 95% di probabilita'; un cliente della seconda classe lo rimborsa completamente nei tempi previsti con l'80% di probabilita' e uno della terza classe con il 60% di probabilita'. Per ciascuna classe, se un cliente della classe riceve piu' finanziamenti, rimborsa completamente nei tempi previsti ciascun finanziamento indipendentemente da tutti gli altri. La banca stima che il 20% dei clienti appartenga alla prima classe, il 40% alla seconda e il 40% alla terza.

a) Se un cliente ha chiesto 3 finanziamenti, e li ha rimborsati tutti completamente nei tempi previsti, qual e' la probabilita' che appartenga alla seconda classe?

b) Se un cliente ha chiesto 5 finanziamenti, e ne ha rimborsati completamente nei tempi previsti 4, mentre 1 e' stato rimborsato in ritardo, qual e' la probabilita' che appartenga alla seconda classe?

c) Se un cliente ha chiesto 3 finanziamenti, e li ha rimborsati tutti completamente nei tempi previsti, e chiede un quarto finanziamento, qual e' la probabilita' che lo rimborsi completamente nei tempi previsti?

5) Sia  $Y$  una variabile aleatoria con densita' di probabilita'

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} I_{(0,\infty)}(y),$$

e sia  $X$  un'altra variabile aleatoria con densita' condizionata a  $Y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2 y^2}{2}}, \quad \text{per } y > 0.$$

Calcolare la densita' marginale di  $X$ .