

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2018/19

6/6/19

Ai primi tre esercizi sono attribuiti 21 punti. PER SUPERARE LO SCRITTO OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 17 NEI PRIMI TRE ESERCIZI. Gli esercizi 4) e 5) verranno corretti solo se si sarà raggiunto un punteggio di almeno 17 nei primi tre esercizi.

LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE

Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) La popolazione italiana è divisa per reddito in tre strati. La percentuale di persone che appartengono al primo strato è il 30%, la percentuale di persone che appartengono al secondo strato è il 50% e la percentuale di persone che appartengono al terzo strato è il 20%. Se una persona appartiene al primo strato la probabilità che abbia un titolo di studio universitario è del 2%, se appartiene al secondo strato è del 40% e se appartiene al terzo strato è del 60%.

a) Qual è la probabilità che una persona scelta a caso abbia un titolo di studio universitario?

b) Se una persona ha un titolo di studio universitario qual è la probabilità che appartenga al terzo strato?

c) Gli eventi "avere un titolo di studio universitario" e "appartenere al terzo strato" sono indipendenti?

2) Un certo titolo quotato in borsa in una giornata può salire o scendere dell'1% o del 2% con probabilità 0.20 ciascuno, oppure salire o scendere del 3% con probabilità 0.10. Supponiamo che il titolo venga sospeso dalle quotazioni se ha un rialzo strettamente maggiore dell'1%. Supponiamo che gli andamenti del titolo nelle varie giornate siano indipendenti.

a) In ciascun giorno, qual è la probabilità che il titolo venga sospeso?

b) In una settimana (5 giorni) qual è la probabilità che il titolo venga sospeso più di una volta?

c) Se nella settimana dal 3 al 7 giugno 2019 il titolo è stato sospeso esattamente 1 volta, qual è la probabilità che nella settimana dal 10 al 14 giugno venga sospeso più di una volta?

d) In un anno (260 giorni di apertura della borsa) qual è il numero medio di volte che il titolo viene sospeso?

3) Una compagnia d'assicurazioni paga circa 1000 sinistri all'anno. L'importo del sinistro i , in migliaia di euro, è S_i ; le variabili aleatorie S_i , $i = 1, 2, \dots, 1000$, sono indipendenti e ciascuna è Gaussiana di media 1 e varianza 0,25. L'esborso totale della compagnia in un anno è perciò

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{1000}.$$

a) Quanto valgono la media e la varianza di S ?

b) Se la compagnia vuole accantonare un capitale C tale che la probabilità che S ecceda C sia del 2%, quanto dev'essere C ?

4) Nel gioco del lotto su ogni ruota ogni settimana vengono estratti a caso 5 numeri da 1 a 90. Un uomo gioca al lotto sulla ruota di Cagliari scommettendo sia sul numero 23 che sull'ambo $\{23, 70\}$.

a) Se in una settimana e' uscito il 23, qual e' la probabilita' che sia uscito l'ambo $\{23, 70\}$?

L'uomo gioca nel modo suddetto per 2 settimane. Sia X il numero di volte in cui esce il 23 e Y il numero di volte in cui esce l'ambo $\{23, 70\}$. Calcolare:

b) $\mathbf{P}(Y = k|X = 1)$ per $k = 0, 1$;

c) $\mathbf{P}(Y = k|X = 2)$ per $k = 0, 1, 2$.

d) Scrivere la densita' di probabilita' congiunta di (X, Y) .

5) Un'azienda produce batterie al cadmio. La quantita' di cadmio contenuta in una batteria, Λ , e' aleatoria, e si puo' supporre distribuita uniformemente in $(0, 5)$. Se la quantita' di cadmio contenuta in una batteria ha un valore λ , la durata della batteria, T , ha densita' di probabilita'

$$\mathbf{I}_{(0, \infty)}(t) 2\lambda t e^{-\lambda t^2}.$$

a) Calcolare la densita' di probabilita' di T .

b) Calcolare $\mathbf{E}[T|\Lambda = \lambda]$.

c) Esprimere la v.a. $\mathbf{E}[T|\Lambda]$ come una funzione di Λ e calcolarne la media (dare per acquisito che $\int_0^\infty e^{-cx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{c}}$, per qualunque costante positiva c).

d) Calcolare $\mathbf{E}[T]$.