CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2018/19
20/7/19

Ai primi tre esercizi sono attribuiti 21 punti. PER SUPERARE LO SCRITTO OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 17 NEI PRIMI TRE ESERCIZI. Gli esercizi 4) e 5) verranno corretti solo se si sara' raggiunto un punteggio di almeno 17 nei primi tre esercizi.
LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE
Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) In un dipartimento ogni giorno tre computer possono, ciascuno indipendentemente da tutti gli altri, collegarsi al server, oppure no. Il primo computer e' molto utilizzato e la probabilita' che sia collegato e' $0,9$; il secondo computer e' utilizzato molto poco e la probabilita' che sia collegato e' $0,3$; infine la probabilita' che il terzo computer sia collegato e' $0,6$. In un dato giorno:

a) Qual e' la probabilita' che tutti e tre i computer siano collegati?

b) Qual e' la probabilita' che nessuno dei computer sia collegato?

c) Qual e' la probabilita' che almeno uno dei computer sia collegato?

d) Sapendo che almeno uno dei computer e' collegato, qual e' la probabilita' che il secondo computer sia collegato?

2) Supponiamo che tra un mese il rendimento all'emissione di un BOT semestrale possa essere del 3% o del 4,5% con la stessa probabilita'. Se il rendimento del BOT semestrale sara' del 3%, il rendimento all'emissione di un BOT annuale sara' del 2%, con probabilita' 0,4, oppure del 2,5% con probabilita' 0,6; se invece il rendimento del BOT semestrale sara' del 4,5%, il rendimento del BOT annuale sara' del 2,5% con probabilita' 0,2, oppure del 3% con probabilita' 0,8.

a) Sia R_1 il rendimento del BOT semestrale ed R_2 il rendimento del BOT annuale. Calcolare la densita' discreta di probabilita' congiunta di R_1 ed R_2.

b) Calcolare la covarianza di R_1 ed R_2.

3) Siano X_1, X_2, X_3 e X_4 variabili aleatorie congiuntamente Gaussiane con vettore delle medie μ e matrice di covarianza C:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) X_4 e' indipendente da X_1? X_4 e' indipendente da X_2? X_1, X_2 e X_4 sono indipendenti?

b) Sia inoltre

$$U = X_1 - 0,5X_2 - X_3 + 2X_4.$$

Scrivere la densita' di probabilita' di U.

4) Una compagnia di assicurazioni ha 20.000 assicurati che hanno polizze sanitarie. Ogni assicurato, in un anno:

- non chiede alcun rimborso, con probabilita' 0,45;
- chiede un rimborso di 800 euro, con probabilita' 0,39;
- chiede un rimborso di 5.000 euro, con probabilita' 0,155;
- chiede un rimborso di 20.000 euro, con probabilita' 0,005.

Supponiamo che gli assicurati si comportino indipendentemente tra di loro.

a) Qual e' il valore atteso dell'ammontare complessivo dei rimborsi pagati dall'assicurazione in un anno?

b) Qual e' la varianza dell'ammontare complessivo dei rimborsi pagati dall'assicurazione in un anno?

e) Sia X il numero di assicurati che chiede un rimborso. Qual e' la legge di X? Qual e' il numero medio di richieste?

f) Sia Y il numero di assicurati che chiede un rimborso di almeno 5.000 euro. Qual e' la legge di Y? Qual e' il numero medio di richieste di almeno 5.000 euro?

g) X e Y sono indipendenti?

5) Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, X esponenziale di parametro 2 e Y esponenziale di parametro 1.

a) Sia $U = X + Y$. Determinare $\mathcal{I}m(U)$ e calcolare la densita' di probabilita' di U.

b) Sia Z un'altra variabile aleatoria, esponenziale di parametro 2, indipendente da (X, Y). Z e' indipendente da U ? Sia $V = X + Y + Z$. Esprimere V in funzione di U e Z, e calcolare la densita' di probabilita' di V.