

**CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2017/18**  
**13/12/18**

**Ai primi due esercizi sono attribuiti 18 punti. PER SUPERARE L'ESAME OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 15 NEI PRIMI DUE ESERCIZI.**

**Agli ultimi due esercizi sono attribuiti 15 punti.**

**LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE**

**Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.**

1) Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie con densità discreta congiunta

	$X$	$-1$	$0$	$1$
$Y$				
$-5$		$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$0$
$0$		$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$
$2$		$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$
$8$		$0$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$

a) Calcolare le densità discrete marginali di  $X$  e  $Y$ .

b)  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?

c) Calcolare  $\mathbb{P}(Y \geq 2 | X \geq 0)$ .

2) Una compagnia d'assicurazioni ha 100.000 clienti. Ciascun cliente paga un premio annuo di 600 euro. Ogni anno la compagnia rimborsa 1000 sinistri. Gli importi dei sinistri (in migliaia di euro),  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 1000$ , sono variabili aleatorie indipendenti ugualmente distribuite, con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 0,25x e^{-0,25x} & \text{per } x \geq 0 \end{cases} .$$

a) Calcolare il valor medio dell'importo di un sinistro.

b) Calcolare il guadagno medio della compagnia (un guadagno medio negativo va inteso ovviamente come una perdita).

3) Vengono messi sul tavolo il re di cuori, il re di quadri, il re di fiori e il re di picche, coperti, cioè girati.

Ad Andrea vengono offerte le seguenti opzioni:

- pescare una carta: se è rossa, vince 200 euro, se è nera perde 200 euro;

- pescare una carta: se è rossa, paga 50 euro; se è nera pesca un'altra carta tra le rimanenti: se la seconda carta pescata è rossa, vince 300 euro, se è nera perde 300 euro.

Sia  $X$  il guadagno di Andrea se sceglie la prima opzione e  $Y$  il guadagno di Andrea se sceglie la seconda opzione.

a) Calcolare la densità discreta di probabilità di  $Y$ .

b) Calcolare il valore atteso di  $X$  e di  $Y$ . Quale opzione conviene ad Andrea?

c) Supponiamo che, nella seconda opzione, se la seconda carta pescata è rossa, Andrea vinca 150 euro, se è nera perda 150 euro. In questo caso, quale opzione gli converrebbe e perché?

4) Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \mathbf{I}_{(e^x,\infty)}(y) \frac{1}{y^2} .$$

Notare che l'espressione che definisce  $f_{X,Y}$  può essere scritta anche nella forma equivalente

$$\mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \mathbf{I}_{(e^x,\infty)}(y) \frac{1}{y^2} = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & x > 0, y > e^x, \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} .$$

- a) Rappresentare graficamente l'insieme dei valori  $(x, y)$  tali che  $f_{X,Y}(x, y)$  e' diversa da zero.
- b)  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?
- c) Calcolare la densita' di probabilita' marginale della variabile  $X$ .
- d)  $f_{X,Y}$  puo' essere scritta anche nella forma

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{I}_{(1,\infty)}(y)\mathbf{I}_{(0,\log(y))}(x)\frac{1}{y^2} \quad .$$

Scrivere l'espressione  $\mathbf{I}_{(1,\infty)}(y)\mathbf{I}_{(0,\log(y))}(x)\frac{1}{y^2}$  nella sua forma equivalente e calcolare la densita' marginale di  $Y$ .

- e) Determinare i valori  $y$  per cui  $f_Y(y)$  e' diversa da zero. Per quei valori di  $y$  scrivere  $f_{X|Y}(x|y)$ .