CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2017/18
12/9/18

Ai primi due esercizi sono attribuiti 18 punti. PER SUPERARE L'ESAME OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 15 NEI PRIMI DUE ESERCIZI.
Agli ultimi due esercizi sono attribuiti 15 punti.
LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE
Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) Un computer deve inviare un file a un server. La banda del canale di connessione e' divisa in 10 fasce. A ogni dato istante, ciascuna fascia, indipendentemente da tutte le altre, e' occupata da altri computer con probabilita' $0,6$.

a) Qual e', a ogni dato istante, il numero medio di fasce occupate da altri computer? **R: 6**

b) A un dato istante, se il file che il computer deve inviare occupa esattamente 2 fasce (anche non consecutive), qual e' la probabilita' che il computer riesca a inviarlo? **R: 0,953642**

2) Una compagnia d'assicurazioni dovra' fronteggiare, nel 2019, rimborsi per un importo complessivo X (in milioni di euro). Si puo' supporre che X sia distribuita secondo la legge Gaussiana di media $\mu = 15$ e varianza $\sigma^2 = 25$. Qual e' l'importo minimo P che la compagnia deve incassare in premi d'assicurazione se si vuole essere sicuri al 95% che P sia sufficiente a pagare tutti i rimborsi? **R:** $P = 23,25$ **milioni di euro**

3) X e Y sono due variabili aleatorie discrete. X puo' assumere i valori $-1, 1$ e Y puo' assumere i valori $1, 2, 3$. Inoltre

$$\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(Y=2) = \frac{3}{8}, \quad \mathbf{P}(Y=3) = \frac{3}{8},$$

$$\mathbf{P}(X=-1|Y=i) = \frac{i-1}{2i}, \quad \text{per } i = 1,2,3$$

$$\mathbf{P}(X=1|Y=i) = \frac{i+1}{2i}, \quad \text{per } i = 1,2,3.$$

a) X e Y sono indipendenti? **R: no**

b) Calcolare la densita' discreta di probabilita' congiunta di X e Y. **R:** $\mathbf{P}(X=-1, Y=1) = 0$, $\mathbf{P}(X=-1, Y=2) = \frac{3}{32}$, $\mathbf{P}(X=-1, Y=3) = \frac{4}{32}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = \frac{8}{32}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=2) = \frac{9}{32}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=3) = \frac{8}{32}$

c) Calcolare la covarianza di X e Y. **R:** $-\frac{25}{4}$

4) Un modello di computer portatile ha un disco rigido che ha una durata aleatoria T_1 che segue una legge esponenziale di parametro 0.1, e un alimentatore che ha una durata aleatoria T_2 che segue una legge esponenziale di parametro 0.05. T_1 e T_2 sono indipendenti. Supponiamo, in prima approssimazione, che il computer si guasti solo se si guasta il disco rigido o l'alimentatore, e indichiamo con T la durata del computer.
T_1, T_2 e T sono misurate in migliaia di ore.

a) Qual e' la probabilita' che il computer duri piu' di 15000 ore ? **R: 0,105399**

b) Per $t > 0$ fissato, calcolare $\mathbf{P}(T > t)$ e $\mathbf{P}(T \leq t)$ **R:** $\mathrm{e}^{-0,15\,t}$ **e** $1 - \mathrm{e}^{-0,15\,t}$

c) Per $t > 0$ fissato, calcolare $\mathbf{P}(T_1 \leq t, T_2 > t | T \leq t)$. **R:** $\frac{(1-\mathrm{e}^{-0,1\,t})\mathrm{e}^{-0,05\,t}}{1-\mathrm{e}^{-0,15\,t}}$

d) Se il computer si e' guastato prima di 2000 ore, qual e' la probabilita' che il guasto sia dovuto al disco rigido ? **R: 0,632833**