

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2017/18
II parziale - 17/5/18

Ai primi due esercizi sono attribuiti 18 punti. PER SUPERARE IL PARZIALE OCCORRE RIPORTARE UN PUNTEGGIO DI ALMENO 15 NEI PRIMI DUE ESERCIZI.

LE RISPOSTE DEVONO ESSERE GIUSTIFICATE

Lasciare in bianco la prima metà (in orizzontale) della prima facciata per la correzione.

1) Siano X e Y due variabili aleatorie con densità discreta congiunta

X	-10	3	12	15
Y				
-5	$\frac{4}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{0}{64}$	$\frac{0}{64}$
0	$\frac{10}{64}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
2	$\frac{10}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{5}{64}$
8	$\frac{0}{64}$	$\frac{0}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{10}{64}$

- a) Calcolare le densità discrete marginali di X e Y .
- b) X e Y sono indipendenti?
- c) Calcolare $\mathbb{P}(X > 10 | Y > 0)$.
- c) Calcolare $\mathbb{E}[e^{-Y}]$.

2) Il rendimento semplice giornaliero di un portafoglio è dato da

$$P = 0.2X_1 + 0.5X_2 + 0.3X_3,$$

dove X_1 , X_2 e X_3 sono i rendimenti semplici giornalieri dei titoli che compongono il portafoglio. Si suppone che X_1 , X_2 e X_3 siano variabili aleatorie Gaussiane indipendenti di medie

$$\mathbb{E}[X_1] = 0.2, \quad \mathbb{E}[X_2] = 0.4, \quad \mathbb{E}[X_3] = 0.3,$$

e varianze

$$\text{Var}[X_1] = 0.01, \quad \text{Var}[X_2] = 0.25, \quad \text{Var}[X_3] = 0.1024.$$

- a) Calcolare il valore atteso e la varianza di P . **R:** $\mathbb{E}[P] = 0.33$, $\text{Var}[P] = 0.072116$
- b) Sia ora \tilde{P} :

$$\tilde{P} = 0.2\tilde{X}_1 + 0.5\tilde{X}_2 + 0.3\tilde{X}_3,$$

dove \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 e \tilde{X}_3 sono i rendimenti semplici giornalieri dei titoli che compongono il portafoglio, e dove ora si suppone che \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 e \tilde{X}_3 siano variabili aleatorie congiuntamente Gaussiane, con le stesse medie di X_1 , X_2 e X_3 , cioè

$$\mathbb{E}[\tilde{X}_1] = 0.2, \quad \mathbb{E}[\tilde{X}_2] = 0.4, \quad \mathbb{E}[\tilde{X}_3] = 0.3,$$

e con matrice di covarianza

$$\begin{bmatrix} 0.01 & -0.04 & 0 \\ -0.04 & 0.25 & -0.08 \\ 0 & -0.08 & 0.1024 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la varianza di \tilde{P} . **R:** $\text{Var}[\tilde{P}] = 0.040116$

c) Quale dei due portafogli e' piu' rischioso?

d) Sia Z una variabile aleatoria Gaussiana standard (cioe' $\mathcal{N}(0,1)$). Determinare il numero $q_{0.9}$ tale che $\mathbb{P}(Z \leq q_{0.9}) = 0.9$ e il numero $q_{0.1}$ tale che $\mathbb{P}(Z \leq q_{0.1}) = 0.1$. **R:** 1.28 e -1.28 .

e) Consideriamo il portafoglio con rendimento \tilde{P} : calcolare il numero p tale che $\mathbb{P}(\tilde{P} \leq p) = 0.1$. Qual e' il valore minimo di \tilde{P} garantito con il 90% della probabilita'? **R:** 0.073629

3) (15 punti)