## ESERCIZI SVOLTI DI CALCOLO DELLE PROBABILITA'

## ESERCIZI DI SBARRAMENTO

**1) (21/5/16)** Una compagnia vuole effettuare un sondaggio sul grado di soddisfazione dei propri clienti. Non sempre pero' i clienti sono disposti a partecipare al sondaggio. Piu' precisamente un cliente donna accettera' di partecipare al sondaggio con il 45% di probabilita', e un cliente uomo con il 65%. Ogni cliente, sia uomo che donna, si comporta in modo del tutto indipendente da tutti gli altri.

a) Su 5 clienti donna a cui viene proposto il sondaggio, qual e' la probabilita' che almeno 3 accettino di partecipare?

b) Su 5 clienti uomo a cui viene proposto il sondaggio, qual e' la probabilita' che almeno 3 accettino di partecipare?

c) Su 5 clienti donna e 5 clienti uomo a cui viene proposto il sondaggio, qual e' la probabilita' che esattamente 8 accettino?

**Svolgimento**

a) Poiche' le 5 donne a cui viene proposto il sondaggio si comportano indipendentemente, e ciascuna ha la stessa probabilita' di accettare di partecipare, il problema puo' essere ricondotto allo schema delle prove Bernoulliane, piu' precisamente a 5 prove Bernoulliane con probabilita' di successo $p = 0.45$. Percio', detto $X$ il numero di donne che accettano di partecipare al sondaggio, $X$ seguira' la legge binomiale di parametri 5 e 0.45. La domanda chiede $\mathbf{P}(X \geq 3)$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq 3) &= \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5) \\
&= \binom{5}{3}(0.45)^3(0.55)^2 + \binom{5}{4}(0.45)^4(0.55) + \binom{5}{5}(0.45)^5 \\
&= 10\,(0.45)^3(0.55)^2 + 5\,(0.45)^4(0.55) + (0.45)^5 = 0.405
\end{aligned}
$$

a) Poiche' le 5 donne a cui viene proposto il sondaggio si comportano indipendentemente, e ciascuna ha la stessa probabilita' di accettare di partecipare, il problema puo' essere ricondotto allo schema delle prove Bernoulliane, piu' precisamente a 5 prove Bernoulliane con probabilita' di successo $p = 0.45$. Percio', detto $X$ il numero di donne che accettano di partecipare al sondaggio, $X$ seguira' la legge binomiale di parametri 5 e 0.45. La domanda chiede $\mathbf{P}(X \geq 3)$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq 3) &= \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \mathbf{P}(X = 5) \\
&= \binom{5}{3}(0.45)^3(0.55)^2 + \binom{5}{4}(0.45)^4(0.55) + \binom{5}{5}(0.45)^5 \\
&= 10\,(0.45)^3(0.55)^2 + 5\,(0.45)^4(0.55) + (0.45)^5 = 0.405
\end{aligned}
$$


b) Lo svolgimento e' del tutto analogo a quello del punto a), solo che ora la probabilita' di successo e' $p = 0.65$. Percio', detto $Y$ il numero di uomini che accettano di partecipare al sondaggio, $Y$ seguira' la legge binomiale di parametri 5 e 0.65. La domanda chiede $\mathbf{P}(Y \geq 3)$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geq 3) &= \mathbf{P}(Y = 3) + \mathbf{P}(Y = 4) + \mathbf{P}(Y = 5) \\
&= \binom{5}{3}(0.65)^3(0.35)^2 + \binom{5}{4}(0.65)^4(0.35) + \binom{5}{5}(0.65)^5 \\
&= 0.764
\end{aligned}
$$

c) Il numero totale di clienti che accetta di partecipare al sondaggio e' $X+Y$. Poiche' i clienti donna e i clienti uomo si comportano indipendentemente gli uni dagli altri, $X$ sara' indipendente da $Y$, percio':

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=8) &= \mathbf{P}(X=5, Y=3)+\mathbf{P}(X=4, Y=4)+\mathbf{P}(X=3, Y=5) \\
&= \mathbf{P}(X=5)\mathbf{P}(Y=3)+\mathbf{P}(X=4)\mathbf{P}(Y=4)+\mathbf{P}(X=3)\mathbf{P}(Y=5) \\
&= \binom{5}{5}(0.45)^5\binom{5}{3}(0.65)^3(0.35)^2+\binom{5}{4}(0.45)^4(0.55)\binom{5}{4}(0.65)^4(0.35) \\
&\quad +\binom{5}{3}(0.45)^3(0.55)^2\binom{5}{5}(0.65)^5 \\
&= 0,073
\end{aligned}$$

**1) (17/6/16)** E' noto che gli elettori intervistati in un exit poll non sempre rispondono in modo veritiero. Una societa' di sondaggi e' incaricata dell'exit poll per il referendum sull'uscita della Gran Bretagna dall'Unione Europea. La societa' stima che un elettore che ha votato per rimanere nell'Unione Europea dichiarera' la verita' con probabilita' del 90%, mentre un elettore che ha votato contro dichiarera' la verita' con probabilita' del 75%. Dall'ultimo sondaggio preelettorale risulta che il 48% degli elettori e' favorevole a rimanere nell'Unione Europea e il 52% e' contrario.

a) Qual e' la probabilita' che un elettore che ha votato per rimanere nell'Unione Europea dichiari che ha votato per rimanere?

b) Qual e' la probabilita' che un elettore che ha votato contro rimanere nell'Unione Europea dichiari invece che ha votato per rimanere?

c) Qual e' la probabilita' che un elettore che dichiara di aver votato per rimanere nell'Unione Europea abbia effettivamente votato cosi'?

**Svolgimento** Siano:

- $R$ l'evento che un elettore scelto a caso voti per rimanere nell'Unione Europea
- $DR$ l'evento che un elettore scelto a caso dichiari che ha votato per rimanere nell'Unione Europea

Per un elettore che ha votato per rimanere nell'Unione Europea, dichiarare la verita' significa dichiarare che ha votato per rimanere, quindi il primo dato del problema e' che

$$\mathbf{P}(DR|R)=0.9.$$

Per un elettore che ha votato contro rimanere nell'Unione Europea, dichiarare la verita' significa dichiarare che ha votato contro, quindi il secondo dato del problema e' che

$$\mathbf{P}((DR)^c|R^c)=0.75.$$

Gli altri dati del problema sono:

$$\mathbf{P}(R)=0.48, \quad \mathbf{P}(R^c)=0.52.$$

a) Si chiede $\mathbf{P}(DR|R)$ che sappiamo gia' dal testo essere $\mathbf{P}(DR|R)=0.9$.

b) Si chiede $\mathbf{P}(DR|R^c)$. Poiche' la probabilita' condizionata a un evento fissato e' una probabilita',

$$\mathbf{P}(DR|R^c)=1-\mathbf{P}((DR)^c|R^c)=0.25$$

c) Si chiede $\mathbf{P}(R|DR)$, che puo' essere calcolata con la formula di Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R|DR) &= \frac{\mathbf{P}(DR|R)\mathbf{P}(R)}{\mathbf{P}(DR|R)\mathbf{P}(R)+\mathbf{P}(DR|(R)^c)\mathbf{P}((R)^c)}\\ &= \frac{0.9\cdot 0.48}{0.9\cdot 0.48+0.25\cdot 0.52}=0.62\end{aligned}$$

**2) (17/6/17)** Abbiamo venduto una put a 3 mesi su un'azione che possediamo. Il prezzo dell'azione fra 3 mesi e' $S = 40e^X$ con $X$ variabile aleatoria Gaussiana di media 0,1 e varianza 0,0081, e il prezzo d'esercizio della put e' 45 euro. In base al funzionamento della put, fra 3 mesi noi avremo una perdita di importo pari a $S - 45$ (se $S$ sara' maggiore di 45, altrimenti non avremo ne' una perdita ne' un guadagno, ma questo puo' essere ignorato ai fini di questo esercizio).

a) Qual e' la probabilita' che la nostra perdita superi 5 euro?

b) Vogliamo accantonare una somma $c$ per coprirci dalla perdita: quanto dev'essere $c$ se vogliamo che la probabilita' che la nostra perdita superi $c$ sia al piu' del 5%?

**Svolgimento**

a)

$$\mathbf{P}(40\,e^X - 45 > 5) = \mathbf{P}(e^X > \frac{50}{40}) = \mathbf{P}(X > \ln(1.25))$$

Questa probabilita' puo' essere calcolata dalle tavole della Gaussiana standard, standardizzando $X$, cioe' sfruttando il fatto che, se $X$ e' una Gaussiana di media $\mu_X$ e deviazione standard $\sigma_X$, $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = Z$ e' una Gaussiana standard, da cui, essendo $\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{0.0081} = 0.09$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > \ln(1.25)) &= \mathbf{P}(\frac{X-0.1}{0.09} > \frac{\ln(1.25)-0.1}{0.09}) = \mathbf{P}(Z > 1.37)\\ &= 1-\mathbf{P}(Z\le 1.37) = 1-0.9147 = 0.0853\end{aligned}$$

b) In formule, cio' che vogliamo e'

$$\mathbf{P}(40\,e^X - 45 > c) \le 0.05.$$

Procedendo come al punto a), abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(40\,e^X - 45 > c) &= \mathbf{P}(X > \ln(c+45)-\ln(40))\mathbf{P}(X > \ln(1.25))\\ &= \mathbf{P}(\frac{X-0.1}{0.09} > \frac{\ln(c+45)-\ln(40)-0.1}{0.09})\\ &= \mathbf{P}(Z > \frac{\ln(c+45)-3.79}{0.09})\\ &= 1-\mathbf{P}(Z \le \frac{\ln(c+45)-3.79}{0.09})\\ &\le 0.05\end{aligned}$$

cioe', detta $\Phi$ la funzione di distribuzione della Gaussiana standard,

$$\mathbf{P}(Z \le \frac{\ln(c+45)-3.79}{0.09}) = \Phi(\frac{\ln(c+45)-3.79}{0.09}) \ge 0.95$$

Poiche' il primo valore per cui $\Phi$ supera 0.95 e' $q_{.95} = 1.65$, e $\Phi$ e' crescente, risultera' $\Phi(z) \ge 0.95$ per $z \ge 1.65$, cioe' vogliamo

$$\frac{\ln(c+45)-3.79}{0.09} \ge 1.65,$$

vale a dire

$$\ln(c+45) \geq 1.65 \cdot 0.09 + 3.79 \quad \Leftrightarrow \quad c \geq e^{1.65 \cdot 0.09+3.79} - 45 = 6.3415$$

**ALTRI ESERCIZI**

**3)** Una compagnia d'assicurazioni prevede 2 classi di rischio: i clienti della prima classe hanno, in ciascun anno, indipendentemente da tutti gli altri anni, una probabilita' del 12% di avere un incidente; quelli della seconda classe del 5%. Per entrambe le classi la probabilita' di avere piu' di un incidente in un anno e' 0. Statisticamente il 25% dei clienti appartiene alla prima classe e il 75% alla seconda.

a) Qual e' la probabilita' che un nuovo cliente (del quale quindi non si conosce la classe di rischio) abbia almeno un incidente nei primi 4 anni?

b) Se il cliente non ha avuto incidenti nei primi 4 anni, qual e' la probabilita' che abbia un incidente l'anno successivo?

c) Dopo quanti anni senza incidenti la probabilita' che il cliente, nell'anno successivo, abbia un incidente risulta minore o uguale al 5.5%?

**Svolgimento**

Siano:

- $I_1, \cdots, I_n$ gli eventi che un cliente scelto a caso abbia un incidente nell'anno $1, \cdots, n$ rispettivamente;

- $P$ l'evento che un cliente scelto a caso appartenga alla prima classe.

Gli eventi $I_1, \cdots, I_n$ sono indipendenti condizionatamente a $P$, e $\mathbf{P}(I_1|P) = \cdots = \mathbf{P}(I_n|P) = 0.12$. Gli eventi $I_1, \cdots, I_n$ sono anche indipendenti condizionatamente a $P^c$, e $\mathbf{P}(I_1|P^c) = \cdots = \mathbf{P}(I_n|P^c) = 0.05$. Inoltre $\mathbf{P}(P) = 0.25$, $\mathbf{P}(P^c) = 0.75$.

a) L'evento che un cliente abbia almeno un incidente nei primi 4 anni e' il complementare dell'evento che non abbia alcun incidente nei primi 4 anni, percio'.

$$\mathbf{P}((I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)^c) \;=\; 1 - \mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)^c) \ .$$

Per la formula della probabilita' totale,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c) \\
= \; & \mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c|P)\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c|P^c)\mathbf{P}(P^c) \\
= \; & \mathbf{P}(I_1^c|P)\mathbf{P}(I_2^c|P)\mathbf{P}(I_3^c|P)\mathbf{P}(I_4^c|P)\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}(I_1^c|P^c)\mathbf{P}(I_2^c|P^c)\mathbf{P}(I_3^c|P^c)\mathbf{P}(I_4^c|P^c)\mathbf{P}(P^c) \\
= \; & 0.88^4 \cdot 0.25 + 0.95^4 \cdot 0.75 = 0.761,
\end{aligned}$$

percio' $\mathbf{P}((I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)^c) = 0.239$.

b) Si chiede

$$\mathbf{P}(I_5|I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c),$$

che puo' essere calcolata dalla definizione di probabilita' condizionata:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(I_5|I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c) &= \frac{\mathbf{P}(I_5 I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)}{\mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(I_5 I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c|P)\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}(I_5 I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c|P^c)\mathbf{P}(P^c)}{\mathbf{P}(I_1^c I_2^c I_3^c I_4^c)} \\
&= \frac{0.12 \cdot 0.88^4 \cdot 0.25 + 0.05 \cdot 0.95^4 \cdot 0.75}{0.761} = 0.0638
\end{aligned}$$

c) Se un cliente non ha avuto incidenti nei primi $n$ anni, la probabilita' che ne abbia uno nell'anno $n+1$ e' $\begin{array}{rcl}\mathbf{P}(I_{n+1}|I_1^c\cdots I_n^c) & = & \frac{\mathbf{P}(I_{n+1}I_1^c\cdots I_n^c)}{\mathbf{P}(I_1^c\cdots I_n^c)} \\ & = & \frac{0.12\cdot 0.88^n\cdot 0.25+0.05\cdot 0.95^n\cdot 0.75}{0.88^n\cdot 0.25+0.95^n\cdot 0.75}.\end{array}$ Questa probabilita' sara' minore del 6% se:

$$\frac{0.12\cdot 0.88^n\cdot 0.25+0.05\cdot 0.95^n\cdot 0.75}{0.88^n\cdot 0.25+0.95^n\cdot 0.75}\leq 0.06$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{0.03\cdot(\frac{0.88}{0.95})^n+0.0375}{(\frac{0.88}{0.95})^n\cdot 0.25+0.75}\leq 0.06$$

$\Leftrightarrow$

$$0.03\cdot(\frac{0.88}{0.95})^n+0.0375\leq 0.06\left((\frac{0.88}{0.95})^n\cdot 0.25+0.75\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$(\frac{0.88}{0.95})^n\leq\frac{0.0075}{0.015}=0.5\quad\Leftrightarrow\quad n\ln(\frac{0.88}{0.95})\leq\ln(0.5)\quad\Leftrightarrow\quad n\geq\frac{-0.6932}{-0.0765}=9.06,$$

quindi, dovendo $n$ essere intero, per $n\geq 10$.

**4)(17/6/16)** In un'ufficio postale si fa un'unica fila per due sportelli, andando a quello che si libera prima. Mi trovo nell'ufficio all'istante di apertura. Ho due persone davanti che, ovviamente, vanno a occupare uno sportello ciascuna. Ritengo che i tempi necessari a servire le due persone siano due variabili aleatorie indipendenti, esponenziali di parametro 0,125.

a) Qual e' la probabilita' che io debba aspettare piu' di 10 minuti?

b) Qual e' la probabilita' che io debba aspettare piu' di $t$ minuti?

c) Quali sono la funzione di distribuzione e la densita' di probabilita' del mio tempo di attesa?

d) Supponiamo che anche il tempo necessario a servire me sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro 0.125, indipendente dai tempi necessari a servire tutti gli altri, e sia $U$ il tempo in cui io lascio l'ufficio. Qual e' la densita' di probabilita' di $U$? Qual e' la probabilita' che io lasci l'ufficio entro 15 minuti?

**Svolgimento** Sia $T_1$ il tempo necessario a servire la persona al primo sportello e $T_2$ il tempo necessario a servire la persona al secondo sportello, $S$ il mio tempo di attesa.

a) Aspettero' piu' di 10 minuti se entrambe le persone ai due sportelli impiegheranno piu' di 10 minuti, cioe'

$$\{S>10\}=\{T_1>10,\,T_2>10\}.$$

Essendo $T_1$ e $T_2$ indipendenti ed identicamente distribuite, avremo

$$\mathbf{P}(S>10)=\mathbf{P}(T_1>10,\,T_2>10)=\mathbf{P}(T_1>10)\mathbf{P}(T_2>10)=\mathbf{P}(T_1>10)^2.$$

Poiche' $T_1$ segue la legge esponenziale di parametro 0.125,

$$\mathbf{P}(T_1>10)=\int_{10}^{\infty}0.125\,e^{-0.125\,t}dt=e^{-0.125\cdot 10}=0.2865,$$

quindi $\mathbf{P}(S>10)=0.082$.

b) Per $t>0$, ragionando come al punto a),

$$\mathbf{P}(S>t)=\mathbf{P}(T_1>t)^2=\left(e^{-0.125\cdot t}\right)^2=e^{-0.25\cdot t}.$$

c) Dal punto b),

$$F_S(t)=\mathbf{P}(S\leq t)\begin{cases}=1-e^{-0.25\cdot t}, & t>0,\\ =0, & t\leq 0\end{cases}$$

quindi

$$f_S(t) \begin{cases} = 0.25\, e^{-0.25\cdot t}, & t > 0, \\ = 0, & t \leq 0 \end{cases},$$

cioe' $S$ e' esponenziale di parametro 0.25.

d) Sia $T$ il tempo necessario a servire me. Poiche' $S$ dipende solo da $T_1$ e $T_2$ (in effetti $S = \min(T_1, T_2)$, quindi $S$ e' una funzione di $T_1$ e $T_2$), $T$ e' indipendente da $S$. Il tempo in cui lascero' l'ufficio sara' $U = S + T$. Dalla formula della densita' della somma di due variabili aleatorie assolutamente continue,

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) f_T(u-s) ds = \int_{\{s:\, s>0,\, u-s>0\}} 0.25 e^{-0.25\, s} 0.125 e^{-0.125(u-s)} ds.$$

Per $u \leq 0$ l'insieme $\{s:\ s > 0,\ u - s > 0\} = \{s:\ s > 0,\ s < u\}$ e' vuoto, quindi $f_U(u) = 0$. Per $u > 0$, $\{s:\ s > 0,\ u - s > 0\} = [0, u]$, percio'

$$\begin{aligned} & \int_{\{s:\, s>0,\, u-s>0\}} 0.25 e^{-0.25\, s} 0.125 e^{-0.125(u-s)} ds \\ = \; & 0.25 \cdot 0.125 e^{-0.125u} \int_0^u e^{-0.125\, s} ds = 0.25 e^{-0.125u}(1 - e^{-0.125u}). \end{aligned}$$

Riassumendo,

$$f_U(u) \begin{cases} = 0.25\, e^{-0.125u}(1 - e^{-0.125u}), & u > 0, \\ = 0, & u \leq 0 \end{cases}.$$

Percio' la probabilita' che io lasci l'ufficio entro 15 minuti e':

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U \leq 15) &= \int_{-\infty}^{15} f_U(u)\, du = \int_0^{15} 0.25\, e^{-0.125u}(1 - e^{-0.125u}) du \\ &= 0.25 \int_0^{15} (e^{-0.125u} - e^{-0.25u}) du \\ &= \frac{0.25}{0.125}(1 - e^{-0.125\cdot 15}) - (1 - e^{-0.25\cdot 15}) \\ &= 1 - 2e^{-0.125\cdot 15} + e^{-0.25\cdot 15} = 0.7168. \end{aligned}$$