Il Concetto di Entropia

- L'entropia è un concetto legato al grado di "disordine" in un sistema.
- Il concetto è usato in vari settori delle scienze:
  - fisica (in particolare nella termodinamica)
  - teoria dell'informazione

Teoria dell'Informazione (1)

- Entropia legata al concetto di "misura dell'informazione"
- Esperimento X1:
  - 4 possibili risultati: a, b, c, d equiprobabili
  - vogliamo memorizzare il risultato su un elaboratore: che codice utilizzare?

Probabilità	*Risultati*	*Codice binario*
¼	a	00
¼	b	01
¼	c	10
¼	d	11

- 2 bit per risultato

Teoria dell'Informazione (2)

- Esperimento X2:
  - 4 risultati **non** equiprobabili

Probabilità	*Risultati*	*Codice binario*
½	a	0
¼	b	10
1/8	c	110
1/8	d	1110

- codice con un numero di bit variabili
  - lunghezza media:
    1/2*1+1/4*2+1/8*3+1/8*4=15/8
  - la lunghezza media è minore di 2!!
- questo codice per l'esperimento X1?
  - lunghezza media 5/2

Teoria dell'Informazione (3)

- Perché per X1 sono necessari due bit mentre per X2 si può fare di meglio?
  - X2 contiene "meno informazione" di X1
- E` possibile fare ancora meglio per l'esperimento X2 ?
- A queste domande risponde la **teoria dell'informazione**.

Entropia di un esperimento finito

- Sia X un esperimento con un numero finito di possibili risultati e_1,... e_q.
- La probabilità che l'evento e_i si verifichi è p_i.
- Entropia dell'esperimento X:

$$H(X)=H(p_1, p_2, .., p_q)=-\sum_{i=1}^{q} p_i \log(p_i)$$

- Perché questa definizione?

Proprietà della funzione H (1)

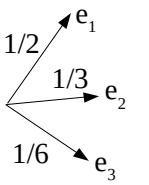
- H è continua sulle p_i
  - piccole modifiche delle probabilità causano piccole modifiche della incertezza dell'esperimento
- se X e X' hanno q e q' risultati equiprobabili e q < q', allora:

  H(X)=H(1/q,...,1/q) < H(1/q',...,1/q')=H(X')

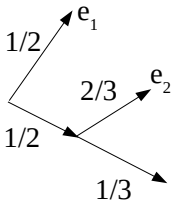
  - più risultati possibili abbiamo maggiore è l'incertezza dell'esperimento

Proprietà della funzione H (2)

- Se l'esperimento X è scomposto in due esperimenti successivi, il risultato non cambia:



H(1/2,1/3,1/6)



H(1/2,1/2) + 1/2 * H(1/3,2/3)

  - i due valori sono uguali

Caratterizzazione di H

- Le uniche funzioni che soddisfano le proprietà di cui ai lucidi precedenti sono:

$$H_C(p_1, p_2, .., p_q)=-C\sum_{i=1}^{q} p_i \log(p_i)$$

  al variare di C.

- Fissiamo C=1 e chiamiamo **bit** l'unità di misura corrispondente a questa scelta.

Entropia e codici

- Se X è un esperimento, un qualunque codice per X che sia unicamente decifrabile avrà una lunghezza media $n \geq H(X)$.
  - nell'esperimento X1 l'entropia è 2 per cui tutti i codici possibili avranno lunghezza media ≥ 2.
  - nell'esperimento X2 l'entropia è 14/8, il codice fornito ha lunghezza media 15/8: forse si può migliorare
    - basta cambiare il codice del risultato C in 111.

Programmi di Compressione

- I programmi di compressione sfruttano il fatto che alcune combinazioni di caratteri sono più probabili di altre.
  - ovvero, l'esperimento "*prendo a caso un file di m bytes dal disco fisso*" ha una entropia inferiore ad 8m (come sarebbe se il file fosse generato in modo completamente casuale)
  - vuol dire anche, in ogni sistema di compressione, ci saranno dei file in cui la versione compressa è più grande di quella originaria.