Introduzione
Inferenze, proposizioni e connettivi
Regole di inferenza corrette
Regole di inferenza non corrette
Logica delle proposizioni
Negazione
Congiunzione
Disgiunzione
Implicazione
Inferenze ed equivalenze logiche
Logica dei predicati
Quantificatori
Equivalenze nella logica dei predicati
Esempi di quiz

Logica

Gianluca Amato

Università "G. d'Annunzio" di Chieti–Pescara
Dipartimento di Economia

31 marzo 2023

Contenuti

1 Introduzione
- Inferenze, proposizioni e connettivi
- Regole di inferenza corrette
- Regole di inferenza non corrette

2 Logica delle proposizioni
- Negazione
- Congiunzione
- Disgiunzione
- Implicazione
- Inferenze ed equivalenze logiche

3 Logica dei predicati
- Quantificatori
- Equivalenze nella logica dei predicati

4 Esempi di quiz

Cos'è la logica

Definizione (Logica)

La logica (dal greco *logos*, ovvero "parola", "pensiero") è lo studio del ragionamento.

Esempio (Esempi di ragionamento)

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Dunque Socrate è mortale.

Ogni numero intero è o pari o dispari
Il numero intero 3 non è pari
Dunque 3 è dispari.

Sono ragionamenti corretti?

Nota

Esistono varie forme di ragionamento, qui siamo interessati al ragionamento deduttivo.

Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio

Tutti gli uomini sono mortali.

Socrate è un uomo.

Socrate è mortale.

Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio

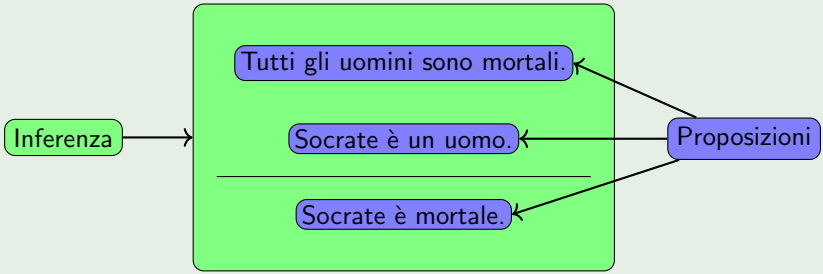
Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio



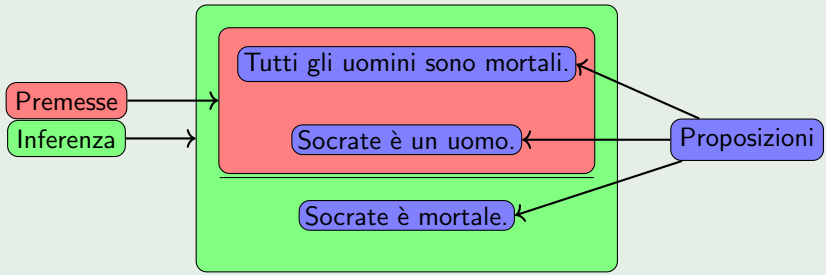
Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio



Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda?

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)

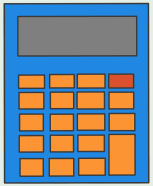
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$



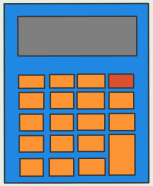
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓



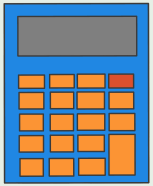
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$



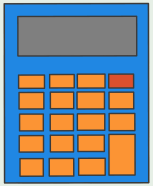
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)



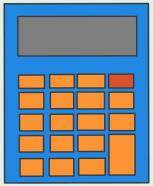
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$



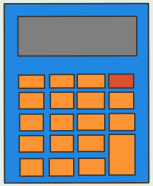
Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)



Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina!

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina! ✗ (è un *ordine*)

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina! ✗ (è un *ordine*)
- Quel ramo del lago di Como che volge a mezzogiorno

Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

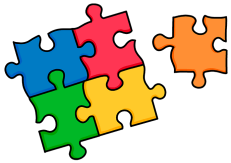
Esempio (Proposizioni ✓o no? ✗)

- Link ama Zelda ✓
- Link ama Zelda? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓(è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina! ✗ (è un *ordine*)
- Quel ramo del lago di Como che volge a mezzogiorno ✗ (è una *descrizione*)

Connettivi

Definizione (Connettivo)

Un connettivo è un elemento grammaticale che collega un certo numero di proposizioni tra di loro per formare una nuova proposizione.



Esempio

- Roma è la capitale d'Italia e Lione è la capitale della Francia
- Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia
- Se Roma è la capitale d'Italia allora Lione è la capitale della Francia
- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia.

Ragionamento deduttivo

La forma principale del ragionamento deduttivo è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio

Inferenze corrette

Definizione (Inferenza corrette)

Una inferenza è corretta se, ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Esempio (una inferenza corretta)

$$\frac{\text{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \quad \text{Stefano non è piemontese}}{\text{Carlo è ligure}}$$

Inferenze e forma logica

La correttezza di una inferenza dipende solo dalla forma logica delle proposizioni.

Esempio (inferenze con la stessa forma logica)

Carlo è ligure o Stefano è piemontese
Stefano non è piemontese

Carlo è ligure

Il maggiordomo è colpevole, oppure la cameriera è colpevole.
La cameriera non è colpevole

Il maggiordomo è colpevole

O due buchi neri si sono scontrati oppure il rivelatore di onde gravitazionali è rotto.
Il rivelatore di onde gravitazionali non è rotto.

Due buchi neri si sono scontrati.

Regole di inferenza

Mettiamo in evidenza la forma logica dell'inferenza.

Usiamo delle lettere proposizionali, al posto delle proposizioni:

A = "Carlo è ligure" B = "Stefano è piemontese"

otteniamo

$$\frac{\text{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \quad \text{Stefano non è piemontese}}{\text{Carlo è ligure}} \qquad \frac{\text{A o B} \quad \text{non B}}{\text{A}}$$

Regole di inferenza

Mettiamo in evidenza la forma logica dell'inferenza.

Usiamo delle lettere proposizionali, al posto delle proposizioni:

A = "Carlo è ligure" B = "Stefano è piemontese"

otteniamo

$$\frac{\text{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \quad \text{Stefano non è piemontese}}{\text{Carlo è ligure}} \qquad \frac{\text{A o B} \quad \text{non B}}{\text{A}}$$

Regola di inferenza

Definizione (Regola di inferenza)

Una inferenza in cui usiamo lettere proposizionali invece di proposizioni vere e proprie prende il nome di regola di inferenza.

Regole di inferenza corrette

Se al contrario rimpiazziamo le lettere con delle proposizioni, troviamo una istanza della regola. Se una regola è corretta, tutte le istanze lo sono.

Esempio (Sillogismo disgiuntivo)

La regola di inferenza

$$\frac{\text{A o B} \quad \text{non B}}{\text{A}}$$

chiamata regola del sillogismo disgiuntivo è corretta, quindi

$$\frac{\text{Il maggiordomo è colpevole, oppure la cameriera è colpevole.} \quad \text{La cameriera non è colpevole}}{\text{Il maggiordomo è colpevole}}$$

è corretta.

Un'altra regola corretta: modus ponens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\text{Se Fabio è genovese, allora Fabio è ligure} \qquad \text{Fabio è genovese}}{\text{Fabio è ligure}}$$

Un'altra regola corretta: modus ponens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\text{Se Fabio è genovese, allora Fabio è ligure} \quad \text{Fabio è genovese}}{\text{Fabio è ligure}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\text{Se A allora B} \quad \text{A}}{\text{B}}$$

detta regola del modus ponens. Vedi anche:

$$\frac{\text{Se sono colpevole allora devo essere punito} \quad \text{Sono colpevole}}{\text{Devo essere punito}}$$

Un'altra regola corretta: modus tollens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\text{Se Fabio è genovese, allora Fabio è ligure} \quad \text{Fabio non è ligure}}{\text{Fabio non è genovese}}$$

Un'altra regola corretta: modus tollens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\text{Se Fabio è genovese, allora Fabio è ligure} \quad \text{Fabio non è ligure}}{\text{Fabio non è genovese}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\text{Se A allora B} \quad \text{non B}}{\text{non A}}$$

detta regola del modus tollens. Vedi anche:

$$\frac{\text{Se sono colpevole allora devo essere punito} \quad \text{Non devo essere punito}}{\text{Non sono colpevole}}$$

Fallacia della negazione dell'antecedente (1)

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\text{Se sono un ladro allora devo essere punito} \quad \text{Non sono un ladro}}{\text{Non devo essere punito}}$$

Fallacia della negazione dell'antecedente (1)

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se sono un ladro allora devo essere punito}\\ \text{Non sono un ladro}\end{array}}{\text{Non devo essere punito}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se A allora B}\\ \text{non A}\end{array}}{\text{non B}}$$

È corretta?

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \quad \text{Fabio non è pescarese}}{\text{Fabio non è abruzzese}}$$

È corretta?

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese}\\ \text{Fabio non è pescarese}\end{array}}{\text{Fabio non è abruzzese}}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \qquad \text{Fabio non è pescarese}}{\text{Fabio non è abruzzese}}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \qquad \text{Fabio non è pescarese } \checkmark}{\text{Fabio non è abruzzese}}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \\ \text{Fabio non è pescarese } \checkmark\end{array}}{\text{Fabio non è abruzzese } \times}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \qquad \text{Fabio non è pescarese } \checkmark}{\text{Fabio non è abruzzese } \times}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un controesempio. L'inferenza non è corretta.

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \\ \text{Fabio non è pescarese } \checkmark\end{array}}{\text{Fabio non è abruzzese } \times}$$

È corretta?

Questa regola **non è** corretta: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un controesempio. L'inferenza non è corretta.

Ed infatti, se ci pensiamo bene, non è corretta neanche la prima regola di inferenza: magari non sono un ladro, ma devo essere punito per qualche altro motivo.

Fallacia dell'affermazione del conseguente

Consideriamo questa inferenza...

$$\frac{\text{Se sono un ladro allora devo essere punito} \quad \text{Devo essere punito}}{\text{Sono un ladro}}$$

Fallacia dell'affermazione del conseguente

Consideriamo questa inferenza...

$$\frac{\text{Se sono un ladro allora devo essere punito} \quad \text{Devo essere punito}}{\text{Sono un ladro}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\text{Se A allora B} \quad \text{B}}{\text{A}}$$

e questa...

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \quad \text{Fabio è abruzzese}}{\text{Fabio è pescarese}}$$

Fallacia dell'affermazione del conseguente

Consideriamo questa inferenza...

$$\frac{\text{Se sono un ladro allora devo essere punito} \quad \text{Devo essere punito}}{\text{Sono un ladro}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\text{Se A allora B} \quad \text{B}}{\text{A}}$$

e questa...

$$\frac{\text{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \quad \text{Fabio è abruzzese}}{\text{Fabio è pescarese}}$$

Anche se la prima può sembrarci corretta (ma non lo è, potrei dover essere punito per qualche altro motivo), la regola di inferenza non è corretta.

Correttezza delle inferenze e delle conclusioni

Attenzione!

Se le premesse di una inferenza sono false, anche la conclusione può essere falsa, sebbene l'inferenza sia corretta.

Abbiamo detto che il modus ponens è corretto:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se A allora B}\\ \text{A}\end{array}}{\text{B}}$$

Ma guardiamo questa istanza:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Se Napoleone è francese allora Napoleone è abruzzese}\\ \text{Napoleone è francese}\end{array}}{\text{Napoleone è abruzzese}}$$

Regole di inferenza con i quantificatori

Negli esempi visti prima, le regole di inferenza sono a livello proposizionale: la loro verità dipende dai legami tra le proposizioni.

Queste inferenze sono più complesse:

$$\frac{\text{Napoleone è corso} \qquad \text{Tutti i corsi sono francesi}}{\text{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\text{Socrate è un uomo} \qquad \text{Tutti gli uomini sono mortali}}{\text{Socrate è mortale}}$$

ma hanno la stessa forma logica e corrispondono alla regola

$$\frac{P(a) \qquad \text{per ogni } x, \text{ se } P(x) \text{ allora } Q(x)}{Q(a)}$$

Contenuti

1 Introduzione
- Inferenze, proposizioni e connettivi
- Regole di inferenza corrette
- Regole di inferenza non corrette

2 Logica delle proposizioni
- Negazione
- Congiunzione
- Disgiunzione
- Implicazione
- Inferenze ed equivalenze logiche

3 Logica dei predicati
- Quantificatori
- Equivalenze nella logica dei predicati

4 Esempi di quiz

Introduzione
Inferenze, proposizioni e connettivi
Regole di inferenza corrette
Regole di inferenza non corrette
Logica delle proposizioni
Negazione
Congiunzione
Disgiunzione
Implicazione
Inferenze ed equivalenze logiche
Logica dei predicati
Quantificatori
Equivalenze nella logica dei predicati
Esempi di quiz

Negazione

La negazione trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- non è vero che prima della proposizione da negare
- non prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

Negazione

La negazione trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- non è vero che prima della proposizione da negare
- non prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia (✗)
- Roma non è la capitale d'Italia (✗)

Negazione

La negazione trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- non è vero che prima della proposizione da negare
- non prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia (✗)
- Roma non è la capitale d'Italia (✗)

Dante Alighieri ha scritto "I Promessi Sposi" (✗)

Negazione

La negazione trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- non è vero che prima della proposizione da negare
- non prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia (✗)
- Roma non è la capitale d'Italia (✗)

Dante Alighieri ha scritto "I Promessi Sposi" (✗)

- Non è vero che Dante Alighieri ha scritto "I Promessi Sposi" (✓)
- Dante Alighieri non ha scritto "I Promessi Sposi" (✓)

Congiunzione

La congiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con e oppure ma.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Parigi è la capitale della Francia (✓)

Congiunzione

La congiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con e oppure ma.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Parigi è la capitale della Francia (✓)

- Roma è la capitale d'Italia e Parigi è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia ma Parigi è la capitale della Francia (✓)

Congiunzione

La congiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con e oppure ma.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Parigi è la capitale della Francia (✓)

- Roma è la capitale d'Italia e Parigi è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia ma Parigi è la capitale della Francia (✓)

$2 + 2 = 4$ (✓)
$3 \times 2 = 5$ (✗)

Congiunzione

La congiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con e oppure ma.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Parigi è la capitale della Francia (✓)

- Roma è la capitale d'Italia e Parigi è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia ma Parigi è la capitale della Francia (✓)

$2 + 2 = 4$ (✓)
$3 \times 2 = 5$ (✗)

- $2 + 2 = 4$ e $3 \times 2 = 5$ (✗)

Congiunzione nella lingua italiana

Talvolta in italiano si cerca di evitare le ripetizioni, e il connettivo e non si trova più tra due proposizioni.

Esempio

Carlo e Maria sono appassionati di baseball

è una abbreviazione di

Carlo è appassionato di baseball e Maria è appassionata di baseball

Congiunzione nella lingua italiana

Talvolta in italiano si cerca di evitare le ripetizioni, e il connettivo e non si trova più tra due proposizioni.

Esempio

Carlo e Maria sono appassionati di baseball

è una abbreviazione di

Carlo è appassionato di baseball e Maria è appassionata di baseball

Ma attenzione!!! Non tutte le e sono istanze della congiunzione

Esempio

Carlo e Maria sono amici

non è una abbreviazione di

Carlo è amico e Maria è amica

Disgiunzione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con o ed oppure.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Lione è la capitale della Francia (✗)

Disgiunzione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con o ed oppure.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Lione è la capitale della Francia (✗)

- Roma è la capitale d'Italia o Lione è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)
- O Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)

Disgiunzione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con o ed oppure.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Lione è la capitale della Francia (✗)

- Roma è la capitale d'Italia o Lione è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)
- O Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)

$2 + 2 = 5$ (✗)
$3 \times 2 = 7$ (✗)

Disgiunzione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con o ed oppure.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Lione è la capitale della Francia (✗)

- Roma è la capitale d'Italia o Lione è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)
- O Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia (✓)

$2 + 2 = 5$ (✗)
$3 \times 2 = 7$ (✗)

- $2 + 2 = 5$ oppure $3 \times 2 = 7$ (✗)

Disgiunzione nella lingua italiana

Riconsideriamo l'esempio di prima:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Lione è la capitale della Francia

È una proposizione piuttosto strana. Nella lingua italiana, utilizziamo la disgiunzione quasi sempre quando le due proposizioni sono strettamente correlate tra di loro. Ad una interrogazione, uno studente un po' ignorante potrebbe rispondere:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Milano è la capitale d'Italia

Spesso, in questi casi, abbreviamo la frase, come già visto per la congiunzione

Esempio

Roma o Milano è la capitale d'Italia

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva

Consideriamo ancora una proposizione un po' innaturale:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Parigi è la capitale della Francia

Cosa ne pensate ? È vera o falsa ?

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva

Consideriamo ancora una proposizione un po' innaturale:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Parigi è la capitale della Francia

Cosa ne pensate ? È vera o falsa ?

- se per voi la frase è **vera**, vuol dire che considerate la "o" in senso inclusivo
  - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è vera;
  - la disgiunzione inclusiva è vera quando una o più delle proposizioni di base è vera;

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva

Consideriamo ancora una proposizione un po' innaturale:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Parigi è la capitale della Francia

Cosa ne pensate ? È vera o falsa ?

- se per voi la frase è **vera**, vuol dire che considerate la "o" in senso inclusivo
  - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è vera;
  - la disgiunzione inclusiva è vera quando una o più delle proposizioni di base è vera;
- se per voi la frase è **falsa**, vuol dire che considerate la "o" in senso esclusivo
  - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è falsa;
  - per voi la "o" introduce una alternativa tra due possibilità, una delle quali deve essere falsa;
  - la disgiunzione esclusiva è vera quando esattamente una delle proposizioni di base è vera.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva

Abbiamo detto prima

Definizione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In realtà siamo stati imprecisi. Dovremmo dire:

Definizione (Disgiunzione inclusiva)

La disgiunzione inclusiva collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **almeno una** delle proposizioni di partenza è vera.

e

Definizione (Disgiunzione esclusiva)

La disgiunzione esclusiva collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **esattamente una** delle proposizioni di partenza è vera.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana 1

Ma chi ha ragione ? La "o" in italiano è inclusiva od esclusiva ?

Spesso il problema non si pone perché, dal contesto, sappiamo che le due proposizioni non possono essere entrambe vere.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana 1

Ma chi ha ragione ? La "o" in italiano è inclusiva od esclusiva ?

Spesso il problema non si pone perché, dal contesto, sappiamo che le due proposizioni non possono essere entrambe vere.

Esempio

Vi assicuro che la seguente proposizione è vera:

- La capitale della California è Sacramento o Los Angeles.

Vuol dire che possono essere entrambe capitali ?

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana 1

Ma chi ha ragione ? La "o" in italiano è inclusiva od esclusiva ?

Spesso il problema non si pone perché, dal contesto, sappiamo che le due proposizioni non possono essere entrambe vere.

Esempio

Vi assicuro che la seguente proposizione è vera:

- La capitale della California è Sacramento o Los Angeles.

Vuol dire che possono essere entrambe capitali ?

Ovviamente no, perché sappiamo che uno stato non può avere due capitali, ma se questa "impossibilità" dettata dal contesto non si verifica, l'italiano è molto ambiguo.

Esempio

Vi assicuro che la seguente proposizione è vera:

- La bandiera della California contiene una stella o un orso.

Vuol dire che la bandiera può avere entrambe ?

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana 2

In generale, nella lingua di tutti i giorni, non è chiaro se "o" e "oppure" vadano intesi in senso inclusivo o esclusivo, ma

Osservazione finale

- quando si studia logica (quindi anche negli esercizi) lo si intende sempre inclusivo;
- in matematica è sempre inclusivo:
  - la proposizione "$2 + 2 = 4$ oppure 5 è dispari" è vera!

Approfondimento: tavole di verità

Si può descrivere il comportamento dei connettivi con le tavole di verità.

Esempio (Tavole di verità dei connettivi)

Indichiamo con P, Q, ... delle proposizioni qualunque. Allora:

P	non P
V	F
F	V

P	Q	P e Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

P	Q	P o Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Nota

Venite dall'ITIS e avete studiato le porte logiche ? Noterete allora che i connettivi sono praticamente la stessa cosa delle porte logiche `not`, `and` e `or`.

Approfondimento: simboli matematici per i connettivi

Ai matematici piacciono i simboli:

Definizione (Simboli dei connettivi)

- negazione (non P): $\neg P$
- congiunzione (P e Q): $P \wedge Q$
- disgiunzione (P o Q): $P \vee Q$

Esempio

$2 + 2 = 4$ e $3 \times 2 = 6$

$\Downarrow$ usando i simboli visti sopra

$2 + 2 = 4 \wedge 3 \times 2 = 6$

Approfondimento: forme proposizionali

Usando le lettere P, Q, R etc... e i simboli $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ è possibile costruire delle formule logiche, chiamate anche forme proposizionali.

Esempio

$P \vee \neg(Q \wedge R)$ è una forma proposizionale.

Approfondimento: forme proposizionali

Usando le lettere P, Q, R etc... e i simboli $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ è possibile costruire delle formule logiche, chiamate anche forme proposizionali.

Esempio

$P \vee \neg(Q \wedge R)$ è una forma proposizionale.

Una forma proposizionale è quella che abbiamo precedentemente chiamato forma logica:

Esempio (dalle forme proposizionali alle proposizioni)

Considerate la forma proposizionale $P \vee \neg(Q \wedge R)$. Allora se

- $P =$ Il maggiordomo è l'assassino
- $Q =$ Il delitto è stato commesso in casa
- $R =$ Il coltello è l'arma del delitto

otteniamo

- Il maggiordomo è l'assassino o non è vero che il delitto è stato commesso in casa con il coltello.

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)
- se gli elefanti volano allora 3+2=5

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)
- se gli elefanti volano allora 3+2=5 (✓)

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)
- se gli elefanti volano allora 3+2=5 (✓)
- se gli elefanti volano allora 3+2=0

Implicazione

L'implicazione collega due proposizioni P e Q tra di loro, e viene di solito resa in italiano con "se P allora Q".

- P è chiamato antecedente;
- Q è chiamato conseguente.

L'implicazione è sempre vera, tranne quando l'antecedente è vero e il conseguente è falso.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)
- se gli elefanti volano allora 3+2=5 (✓)
- se gli elefanti volano allora 3+2=0 (✓)

Implicazione e linguaggio naturale

Gli esempi di prima vi sono sembrati strani ?

Note

Quello che vi sto presentando è solo un tipo particolare di logica, chiamata logica classica proposizionale. Il se ... allora in italiano non è quasi mai corrispondente alla implicazione di questa logica.

Esempio

- se sarai promosso a scuola, allora ti comprerò la PlayStation 5
  - coinvolge azioni che avverranno in futuro, non ora: è il reame della logica temporale;
  - la versione classica proposizionale sarebbe:

    "se sei stato promosso a scuola, allora ti ho comprato la PlayStation 5"

Implicazione e linguaggio naturale

Gli esempi di prima vi sono sembrati strani ?

Note

Quello che vi sto presentando è solo un tipo particolare di logica, chiamata logica classica proposizionale. Il se ... allora in italiano non è quasi mai corrispondente alla implicazione di questa logica.

Esempio

- se sarai promosso a scuola, allora ti comprerò la PlayStation 5
  - coinvolge azioni che avverranno in futuro, non ora: è il reame della logica temporale;
  - la versione classica proposizionale sarebbe:

    "se sei stato promosso a scuola, allora ti ho comprato la PlayStation 5"
- se n è divisibile per 4 allora n è pari
  - n è divisibile per 4 non è una proposizione, non possiamo dire se è vera è falsa perché ciò dipende dal valore di n: siamo nel reame della logica dei predicati;
  - la versione proposizionale sarebbe "se 8 è divisibile per 4 allora 8 è pari"
  - si potrebbe trovare forse in un testo matematico, ma non è certo così comune.

Equivalenze logiche

Definizione

Due proposizioni sono logicamente equivalenti quando hanno sempre lo stesso valore di verità, indipendentemente dai valori di verità delle proposizioni semplici che la compongono.

Esempio (Commutatività della congiunzione)

Pikachu è giallo e *Bulbasaur è verde* $[P \wedge Q]$

è equivalente a (si usa il simbolo $\equiv$)

Bulbasaur è verde e *Pikachu è giallo* $[Q \wedge P]$

Esempio (Idempotenza della congiunzione)

Pikachu è giallo e *Pikachu è giallo* $[P \wedge P]$

$\equiv$

Pikachu è giallo $[P]$.

Equivalenze logiche notevoli 1

Alcune equivalenze logiche sono molto importanti. Tra di queste:

Esempio (Doppia negazione)

Non è vero che Pikachu non è giallo [$\neg\neg P$]

$\equiv$

Pikachu è giallo [P]

Equivalenze logiche notevoli 2

Esempio (Legge di De Morgan)

Non è vero che Pikachu e Bulbasaur sono entrambi gialli $[\neg(P \wedge Q)]$

$\equiv$

Pikachu non è giallo o Bulbasaur non è giallo $[\neg P \vee \neg Q]$

Esempio (Legge di De Morgan)

Non è vero che o Pikachu o Bulbasaur è rosso $[\neg(P \vee Q)]$

$\equiv$

Pikachu non è rosso e Bulbasaur non è rosso $[\neg P \wedge \neg Q]$

Equivalenze logiche notevoli 3

Esempio (Contronominale di una implicazione)

Se n è divisibile per 4 allora n è pari $[P \to Q]$

$\equiv$

Se n non è pari allora n non è divisibile per 4 $[\neg Q \to \neg P]$

Invece, le seguenti equivalenze sono false

Esempio (Implicazione inversa)

Se n è divisibile per 4 allora n è pari $[P \to Q]$

$\not\equiv$

Se n è pari allora n è divisibile per 4 $[Q \to P]$

Esempio (Implicazione contraria)

Se n è divisibile per 4 allora n è pari $[P \to Q]$

$\not\equiv$

Se n non è divisibile per 4 allora n non è pari $[\neg P \to \neg Q]$

Contenuti

1 Introduzione
- Inferenze, proposizioni e connettivi
- Regole di inferenza corrette
- Regole di inferenza non corrette

2 Logica delle proposizioni
- Negazione
- Congiunzione
- Disgiunzione
- Implicazione
- Inferenze ed equivalenze logiche

3 Logica dei predicati
- Quantificatori
- Equivalenze nella logica dei predicati

4 Esempi di quiz

Funzioni proposizionali

Consideriamo ora queste frasi:

- x è la capitale d'Italia
- $0 \cdot x = 3$
- $x^2 \geq 0$

Sono proposizioni?

Funzioni proposizionali

Consideriamo ora queste frasi:

- x è la capitale d'Italia
- $0 \cdot x = 3$
- $x^2 \geq 0$

Sono proposizioni?

No, perché il fatto che siano vere o false dipende da chi sono x e y! Si chiamano funzioni proposizionali.

Se rimpiazziamo le variabili con dei termini, torniamo ad avere delle proposizioni:

- **Pescara** è la capitale d'Italia
- $0 \cdot \mathbf{2} = 3$
- $\mathbf{3}^2 \geq 1$

Ma c'è un altro modo per ottenere delle proposizioni dalle forme proposizionali: si possono usare i quantificatori.

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia (✓)

- se pongo $x =$ Roma, la proposizione *Roma* è la capitale d'Italia diventa vera.

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia (✓)

- se pongo $x =$ Roma, la proposizione *Roma* è la capitale d'Italia diventa vera.

Esiste x tale che $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\exists x,\ 0 \cdot x = 3$

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia (✓)

- se pongo $x =$ Roma, la proposizione *Roma* è la capitale d'Italia diventa vera.

Esiste x tale che $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\exists x, 0 \cdot x = 3$ (✗)

- non c'è nessun valore che posso mettere al posto di x che rende $0 \cdot x = 3$ vero.

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia (✓)

- se pongo $x =$ Roma, la proposizione *Roma* è la capitale d'Italia diventa vera.

Esiste x tale che $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\exists x,\ 0 \cdot x = 3$ (✗)

- non c'è nessun valore che posso mettere al posto di x che rende $0 \cdot x = 3$ vero.

Esiste x tale che $x^2 \geq 0$ — in simboli $\exists x,\ x^2 \geq 0$

Quantificatore esistenziale

Definizione (Quantificatore esistenziale)

Il quantificatore esistenziale "esiste x tale che" ($\exists x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **c'è almeno un valore** che è possibile rimpiazzare al posto della x che rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Esiste x tale che x è la capitale d'Italia (✓)

- se pongo $x =$ Roma, la proposizione *Roma* è la capitale d'Italia diventa vera.

Esiste x tale che $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\exists x, 0 \cdot x = 3$ (✗)

- non c'è nessun valore che posso mettere al posto di x che rende $0 \cdot x = 3$ vero.

Esiste x tale che $x^2 \geq 0$ — in simboli $\exists x, x^2 \geq 0$ (✓)

- se pongo $x = 1$, abbiamo che $1^2 \geq 0$ è vera.

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia (✗)

- non è vero che qualunque cosa metto al posto di x ottengo una proposizione vera, ad esempio, se $x =$ Pescara si ottiene "Pescara è la capitale d'Italia" che è falsa.

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia (✗)

- non è vero che qualunque cosa metto al posto di x ottengo una proposizione vera, ad esempio, se $x =$ Pescara si ottiene "Pescara è la capitale d'Italia" che è falsa.

Per ogni x, $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\forall x,\ 0 \cdot x = 3$

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia (✗)

- non è vero che qualunque cosa metto al posto di x ottengo una proposizione vera, ad esempio, se $x =$ Pescara si ottiene "Pescara è la capitale d'Italia" che è falsa.

Per ogni x, $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\forall x,\ 0 \cdot x = 3$ (✗)

- è falso

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia (✗)

- non è vero che qualunque cosa metto al posto di x ottengo una proposizione vera, ad esempio, se $x =$ Pescara si ottiene "Pescara è la capitale d'Italia" che è falsa.

Per ogni x, $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\forall x,\ 0 \cdot x = 3$ (✗)

- è falso

Per ogni x, $x^2 \geq 0$ in simboli $\forall x,\ x^2 \geq 0$

Quantificatore universale

Definizione (Quantificatore universale)

Il quantificatore universale "per ogni x" ($\forall x$) trasforma una funzione proposizionale contenente x in una proposizione, che è vera quando **qualunque valore** che rimpiazzo al posto di x rende vera la funzione proposizionale.

Esempio

Per ogni x, x è la capitale d'Italia (✗)

- non è vero che qualunque cosa metto al posto di x ottengo una proposizione vera, ad esempio, se $x =$ Pescara si ottiene "Pescara è la capitale d'Italia" che è falsa.

Per ogni x, $0 \cdot x = 3$ — in simboli $\forall x,\ 0 \cdot x = 3$ (✗)

- è falso

Per ogni x, $x^2 \geq 0$ in simboli $\forall x,\ x^2 \geq 0$ (✓)

- è vera perché il quadrato di un numero, qualunque esso sia, è sempre positivo (o tutt'al più nullo)

Dominio di quantificazione

Nella proposizione "Per ogni x, x è la capitale d'Italia" quali sono i valori di x sensati da provare?

- $x =$ Roma ha senso, e "Roma è la capitale d'Italia" è vera;
- $x =$ Pescara ha senso, anche se "Pescara è la capitale d'Italia" è falsa;
- $x = 34$ non ha molto senso

Ogni quantificatore (universale o esistenziale) ha un dominio di quantificazione implicito.

- Per ogni x, x è la capitale d'Italia

Dominio di quantificazione

Nella proposizione "Per ogni x, x è la capitale d'Italia" quali sono i valori di x sensati da provare?

- $x =$ Roma ha senso, e "Roma è la capitale d'Italia" è vera;
- $x =$ Pescara ha senso, anche se "Pescara è la capitale d'Italia" è falsa;
- $x = 34$ non ha molto senso

Ogni quantificatore (universale o esistenziale) ha un dominio di quantificazione implicito.

- Per ogni x, x è la capitale d'Italia
  - dominio: insieme di tutte le città

Dominio di quantificazione

Nella proposizione "Per ogni x, x è la capitale d'Italia" quali sono i valori di x sensati da provare?

- $x =$ Roma ha senso, e "Roma è la capitale d'Italia" è vera;
- $x =$ Pescara ha senso, anche se "Pescara è la capitale d'Italia" è falsa;
- $x = 34$ non ha molto senso

Ogni quantificatore (universale o esistenziale) ha un dominio di quantificazione implicito.

- Per ogni x, x è la capitale d'Italia
  - dominio: insieme di tutte le città
- Per ogni x, $3 + x = 4$

Dominio di quantificazione

Nella proposizione "Per ogni x, x è la capitale d'Italia" quali sono i valori di x sensati da provare?

- $x =$ Roma ha senso, e "Roma è la capitale d'Italia" è vera;
- $x =$ Pescara ha senso, anche se "Pescara è la capitale d'Italia" è falsa;
- $x = 34$ non ha molto senso

Ogni quantificatore (universale o esistenziale) ha un dominio di quantificazione implicito.

- Per ogni x, x è la capitale d'Italia
  - dominio: insieme di tutte le città
- Per ogni x, $3 + x = 4$
  - dominio: insieme dei numeri (ma quale: numeri interi, razionali, reali, ...?)

Quantificatore universale limitato

Certe volte vogliamo essere espliciti sul dominio di quantificazione.

Esempio

Per ogni x, $x + 2 > 0$

Quantificatore universale limitato

Certe volte vogliamo essere espliciti sul dominio di quantificazione.

Esempio

Per ogni x, $x + 2 > 0$

- è ambiguo... se x può essere un numero qualunque è falso (pensiamo a $x = -10$)
- ma se x sono solo i numeri naturali (interi positivi), allora è vero

Quantificatore universale limitato

Certe volte vogliamo essere espliciti sul dominio di quantificazione.

Esempio

Per ogni x, $x + 2 > 0$

- è ambiguo... se x può essere un numero qualunque è falso (pensiamo a $x = -10$)
- ma se x sono solo i numeri naturali (interi positivi), allora è vero

Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x + 2 > 0$

Quantificatore universale limitato

Certe volte vogliamo essere espliciti sul dominio di quantificazione.

Esempio

Per ogni x, $x + 2 > 0$

- è ambiguo... se x può essere un numero qualunque è falso (pensiamo a $x = -10$)
- ma se x sono solo i numeri naturali (interi positivi), allora è vero

Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x + 2 > 0$

- così specifichiamo chiaramente che x lo prendiamo nei numeri naturali
- si chiama quantificatore limitato

In realtà, il quantificatore limitato è solo una notazione compatta per quello standard:

Esempio

Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $x + 2 > 0$

$$\equiv$$

Per ogni x, se $x \in \mathbb{N}$ allora $x + 2 > 0$

Quantificatore esistenziale limitato

Esempio

Esiste x tale che $2x = 1$

Quantificatore esistenziale limitato

Esempio

Esiste x tale che $2x = 1$ (?)

- è ambiguo... se x può essere un numero qualunque è vero (pensiamo ad esempio a $x = \frac{1}{2}$)
- ma se x sono solo i numeri interi allora è falso

Esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $2x = 1$

- chiariamo che x può essere scelto tra i numeri razionali

Esiste x tale che $x \in \mathbb{Q}$ e $2x = 1$

- versione estesa

Quantificatori e linguaggio naturale

Le proposizioni viste nei lucidi precedenti non sono propriamente in italiano.

- In italiano non si usano le variabili!! Al loro posto usiamo nomi e pronomi.
- L'uso di "per ogni" in italiano è raro. Sono più comuni tutti, qualunque, etc...
- Anche per "esiste" in italiano ci sono molte alternative C'è, C'è almeno un, etc...

Proposizioni quantificate in italiano si possono comunque "tradurre" con "per ogni" ed "esiste".

Esempio

Tutti gli uomini sono mortali

$\equiv$

per ogni x, se x è un uomo allora x è mortale

Esempio

Esiste un elefante che vola

$\equiv$

esiste x tale che x è un elefante e x vola

Equivalenze logiche notevoli con i quantificatori 1

Esempio

Tutti gli usignoli volano e trillano $[\forall x \in U, P(x) \land Q(x)]$

$\equiv$

Tutti gli usignoli volano e tutti gli usignoli trillano $[(\forall x \in U, P(x)) \land (\forall x \in U, Q(x))]$

Esempio

C'è un pokemon di colore giallo o verde
$[\exists x \in P, G(x) \lor V(x)]$

$\equiv$

C'è un pokemon di colore giallo o c'è un pokemon di colore verde
$[(\exists x \in P, G(x)) \lor (\exists x \in P, V(x))]$

Equivalenze logiche notevoli con i quantificatori 2

Esempio

Non tutti i gatti sono neri
Non è vero che per ogni x, se x è un gatto allora x è nero
$[\neg\forall x, G(x) \to N(x)]$

$\equiv$

Esiste un gatto che non è nero
Esiste x tale che $G(x)$ e non $N(x)$
$[\exists x, G(x) \wedge \neg N(x)]$

Esempio

Non esiste un elefante volante
$[\neg\exists x, E(x) \wedge V(x)]$

$\equiv$

Tutti gli elefanti sono non volanti
$[\forall x, E(x) \to \neg V(x)]$

Contenuti

1 Introduzione
- Inferenze, proposizioni e connettivi
- Regole di inferenza corrette
- Regole di inferenza non corrette

2 Logica delle proposizioni
- Negazione
- Congiunzione
- Disgiunzione
- Implicazione
- Inferenze ed equivalenze logiche

3 Logica dei predicati
- Quantificatori
- Equivalenze nella logica dei predicati

4 Esempi di quiz

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti
2. Luigi è distratto
3. Tutte le persone distratte amano nuotare

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

A. Tutte le persone che amano nuotare sono distratte.
B. Luigi è un matematico.
C. Tutte le persone distratte sono matematici.
D. Luigi ama nuotare.
E. Tutti i matematici amano nuotare.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

A. Tutte le persone che amano nuotare sono distratte.
B. Luigi è un matematico.
C. Tutte le persone distratte sono matematici.
D. Luigi ama nuotare.
E. Tutti i matematici amano nuotare.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

A. Tutte le persone che amano nuotare sono distratte

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

A. Tutte le persone che amano nuotare sono distratte $[\forall x, N(x) \to D(x)]$

Non c'è motivo per cui debba essere vera (la proposizione 3 afferma l'inverso)

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

A. Tutte le persone che amano nuotare sono distratte $[\forall x, N(x) \to D(x)]$ (✗)

Non c'è motivo per cui debba essere vera (la proposizione 3 afferma l'inverso)

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

C. Tutte le persone distratte sono matematici

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

C. Tutte le persone distratte sono matematici $[\forall x, D(x) \to M(x)]$

Non c'è motivo per cui debba essere vera (la proposizione 1 afferma l'inverso)

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

C. Tutte le persone distratte sono matematici $[\forall x, D(x) \to M(x)]$ (✗)

Non c'è motivo per cui debba essere vera (la proposizione 1 afferma l'inverso)

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

B. Luigi è un matematico.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

B. Luigi è un matematico. $[M(\text{Luigi})]$

Non c'è motivo per cui debba essere vera.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

B. Luigi è un matematico. $[M(\text{Luigi})]$ (✗)

Non c'è motivo per cui debba essere vera.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

D. Luigi ama nuotare.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

D. Luigi ama nuotare. $[N(\text{Luigi})]$

L'inferenza è corretta. Infatti:

- da (3) sappiamo che tutte le persone distratta sanno nuotare, ne inferiamo che: se Luigi è distratto, allora Luigi ama nuotare" $[D(\text{Luigi}) \to N(\text{Luigi})]$
- da (2) e la proposizione di sopra, per la regola chiamata modus ponens, sappiamo che: Luigi ama nuotare $[N(\text{Luigi}))]$

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \rightarrow D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \rightarrow N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

D. Luigi ama nuotare. $[N(\text{Luigi})]$ (✓)

L'inferenza è corretta. Infatti:

- da (3) sappiamo che tutte le persone distratta sanno nuotare, ne inferiamo che: se Luigi è distratto, allora Luigi ama nuotare" $[D(\text{Luigi}) \rightarrow N(\text{Luigi})]$
- da (2) e la proposizione di sopra, per la regola chiamata modus ponens, sappiamo che: Luigi ama nuotare $[N(\text{Luigi}))]$

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

E. Tutti i matematici amano nuotare.

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

E. Tutti i matematici amano nuotare. $[\forall x, M(x) \to N(x)]$

Sebbene questa proposizione non sia esplicitamente contenuta nelle premesse, è ovviamente inferibile dalle premesse.

- Preso una persona qualunque (x), se quella persona è un matematico $(M(x))\ldots$
- Dalla (1) consegue che quella persona è distratta $(D(x))$
- Dalla (3) consegue che quella persona ama nuotare $(N(x))$

Esempio

Consideriamo le seguenti affermazioni:

1. Tutti i matematici sono distratti $[\forall x, M(x) \to D(x)]$
2. Luigi è distratto $[D(\text{Luigi})]$
3. Tutte le persone distratte amano nuotare $[\forall x, D(x) \to N(x)]$

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

E. Tutti i matematici amano nuotare. $[\forall x, M(x) \to N(x)]$ (✓)

Sebbene questa proposizione non sia esplicitamente contenuta nelle premesse, è ovviamente inferibile dalle premesse.

- Preso una persona qualunque (x), se quella persona è un matematico $(M(x))\ldots$
- Dalla (1) consegue che quella persona è distratta $(D(x))$
- Dalla (3) consegue che quella persona ama nuotare $(N(x))$

That's all Folks!