# Il framework semantico

Sviluppato per trattare in maniera uniforme

- semantiche standard (risultanti,risposte calcolate, ... )

- semantiche per analisi statiche (sharing, groundness ... )

Per far ciò si basa su

- una semantica di base dettagliata che modella gli alberi SLD,

- modellizzazione delle astrazioni come inserzioni di Galois tra alberi SLD e appropriati domini astratti

# Obiettivi

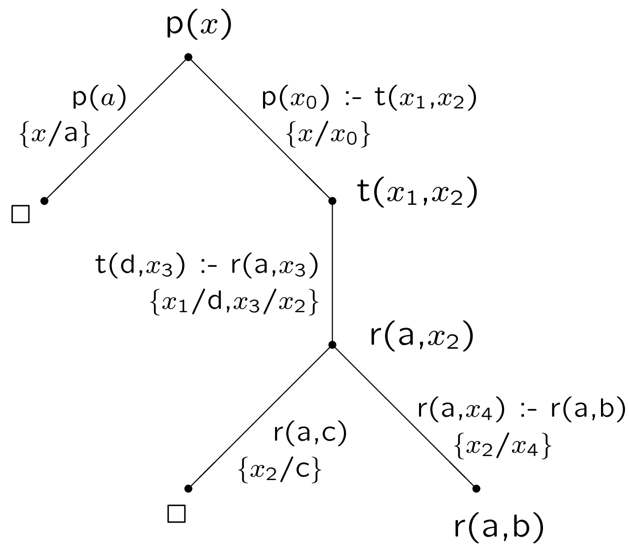
- Estendere il framework semantico
  - Osservabili additivi
  - Osservabili operazionali

- Studiare la struttura del reticolo degli osservabili
  - Chiusura delle classi di osservabili rispetto a lub e glb,
  - Elementi massimali “notevoli” del reticolo

- Studiare alcuni operatori sulle astrazioni, in particolare per gli aspetti correlati al framework
  - Dipendenze funzionali
  - Completamento disgiuntivo

# Alberi SLD e collezioni

Vogliamo un dominio concreto molto dettagliato. Usiamo gli alberi SLD




che rappresentiamo con l'insieme di clausole

$$
\begin{aligned}
\{ & \\
& p(x), \\
& p(x) \xrightarrow[p(a)]{\{x/a\}} \Box, \\
& p(x) \xrightarrow[p(x_0):-t(x_1,x_2)]{\{x/x_0\}} t(x_1,x_2), \\
& p(x) \xrightarrow[p(x_0):-t(x_1,x_2)]{\{x/x_0\}} t(x_1,x_2) \xrightarrow[t(d,x_3):-r(a,x_3)]{\{x_1/d,x_2/x_3\}} r(a,x_2), \\
& \ldots \\
\} &
\end{aligned}
$$

# Semantica denotazionale

Le funzioni semantiche sono:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{Q} : QUERY & \longrightarrow & \mathbb{D}, \\
\mathcal{G} : GOAL & \longrightarrow & (\mathbb{I} \to \mathbb{D}), \\
\mathcal{A} : ATOM & \longrightarrow & (\mathbb{I} \to \mathbb{D}), \\
\mathcal{P} : PROG & \longrightarrow & (\mathbb{I} \to \mathbb{I}), \\
\mathcal{C} : CLAUSE & \longrightarrow & (\mathbb{I} \to \mathbb{I}).
\end{array}
$$

così definite:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{Q}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!] & = & \mathcal{G}[\![\boldsymbol{G}]\!]_{\mathsf{lfp}\,\mathcal{P}[\![P]\!]} \\
\mathcal{G}[\![\Box]\!]_I & = & \boldsymbol{Id}|_{\Box} \\
\mathcal{G}[\![A, \boldsymbol{G}]\!]_I & = & \mathcal{A}[\![A]\!]_I \times \mathcal{G}[\![\boldsymbol{G}]\!]_I \\
\mathcal{A}[\![A]\!]_I & = & A \cdot I \\
\mathcal{P}[\![\emptyset]\!]_I & = & \boldsymbol{Id}|_{\mathbb{I}} \\
\mathcal{P}[\![\{c\} \cup P]\!]_I & = & \Big[\mathcal{C}[\![c]\!]_I + \mathcal{P}[\![P]\!]_I\Big]_{\equiv} \\
\mathcal{C}[\![p(\boldsymbol{t}) \leftarrow \boldsymbol{B}]\!]_I & = & \Big[\mathsf{tree}(p(\boldsymbol{t}) \leftarrow \boldsymbol{B}) \bowtie \mathcal{G}[\![\boldsymbol{B}]\!]_I\Big]_{\equiv}
\end{array}
$$

mentre la *denotazione bottom-up* è:

$$\mathcal{F}[\![P]\!] = \mathsf{lfp}\,\mathcal{P}[\![P]\!] = \mathcal{P}[\![P]\!] \uparrow \omega$$

# Semantica operazionale

Definita tramite un sistema di transizione $\mathcal{T} = (\mathbb{D}, \overset{P}{\longmapsto})$, dalla regola:

$$\frac{D \in \mathbb{D},\ \ D \neq D \bowtie \mu(\text{tree}(P))}{D \overset{P}{\longmapsto} D \bowtie \mu(\text{tree}(P))}$$

dove

$$\mu(D) = \sum \{(A \cdot D|_{\mathbb{I}}) \times \boldsymbol{Id}\}_{A \in Atoms}$$

che è una specie di *unfolding sequenziale*. Il significato di una query $\boldsymbol{G}$ `in` $P$ è definita da

$$\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!] = \sum \left\{ D \mid Id|_{\boldsymbol{G}} \overset{P}{\longmapsto}{}^{*} D \right\}$$

e, come ci si aspetta, si ha:

$$\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!] = \{[d]_{\underset{\approx}{\text{der}}} \mid d = \boldsymbol{G} \xrightarrow[P]{\theta}{}^{*} \boldsymbol{B}\}$$

Su $\mathcal{B}$ si definisce anche una nozione di equivalenza tra programmi:

$$P_1 \approx P_2 \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{G}, \mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P_1]\!] = \mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P_2]\!]$$

La *denotazione top-down* è data da:

$$\mathcal{O}[\![P]\!] = \left[ \sum \left\{ \mathcal{B}[\![p(\boldsymbol{x}) \texttt{ in } P]\!] \right\}_{p \in \Pi} \right]_{\equiv}$$

# Proprietà semantiche

- Composizionalità della semantica operazionale

$$\mathcal{B}[\![A \ \texttt{in} \ P]\!] = A \cdot \mathcal{O}[\![P]\!]$$
$$\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2 \ \texttt{in} \ P]\!] = \mathcal{B}[\![\boldsymbol{G}_1 \ \texttt{in} \ P]\!] \times \mathcal{B}[\![\boldsymbol{G}_2 \ \texttt{in} \ P]\!],$$

- Correttezza e minimalità

$$P_1 \approx P_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}[\![P_1]\!] = \mathcal{O}[\![P_2]\!]$$

- OR-composizionalità

$$\mathcal{O}[\![P_1 \cup P_2]\!] = \mathcal{O}[\![P_1]\!] \uplus \mathcal{O}[\![P_2]\!]$$

- Uguaglianza tra semantiche

$$\mathcal{O}[\![P]\!] = \mathcal{F}[\![P]\!]$$
$$\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!] = \mathcal{Q}[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]$$

# Osservabili

Definiamo come osservabili le inserzioni di Galois $\langle \gamma, \alpha \rangle$ tra $\mathbb{D}$ e un dominio astratto $\mathbb{A}$ per cui:

1. $(\gamma \circ \alpha)(\emptyset) = \emptyset$,

2. $\gamma \circ \alpha$ è un uco ristretto a $\mathsf{WFS}_{\boldsymbol{G}}$,

3. se $D \equiv D'$ allora $\gamma(\alpha(D)) \equiv \gamma(\alpha(D'))$.

Invece di lavorare su inserzioni di Galois useremo spesso l'operatore di chiusura $\rho = \gamma \circ \alpha$ associato. Si definisce la *equivalenza osservazionale* come:

$$P_1 \approx_\rho P_2 \iff \forall \boldsymbol{G},\ \rho(\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P_1]\!]) = \rho(\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P_2]\!])$$

# Semantica astratta

## Semantica denotazionale

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!] &= \mathcal{G}_\rho[\![\boldsymbol{G}]\!]_{\mathsf{lfp}\,\mathcal{P}_\rho[\![P]\!]} \\
\mathcal{G}_\rho[\![\Box]\!]_X &= \rho(Id|_\Box) \\
\mathcal{G}_\rho[\![A, \boldsymbol{G}]\!]_X &= \mathcal{A}_\rho[\![a]\!]_X \mathbin{\tilde{\times}} \mathcal{G}_\rho[\![\boldsymbol{G}]\!]_X \\
\mathcal{A}_\rho[\![A]\!]_X &= A \mathbin{\tilde{\cdot}} X \\
\mathcal{P}_\rho[\![\emptyset]\!] &= \rho(Id)|_{\mathbb{I}} \\
\mathcal{P}_\rho[\![\{c\} \cup P]\!]_X &= \Big[\mathcal{C}_\rho[\![c]\!]_X \mathbin{\tilde{+}} \mathcal{P}_\rho[\![P]\!]_X\Big]_{\equiv_\rho} \\
\mathcal{C}_\rho[\![p(\boldsymbol{t} \leftarrow \boldsymbol{B}]\!]_X &= \Big[\rho(\mathsf{tree}(p(\boldsymbol{t}) \leftarrow \boldsymbol{B})) \mathbin{\tilde{\bowtie}} \\
&\qquad \mathcal{G}_\rho[\![\boldsymbol{B}]\!]_X\Big]_{\equiv_\rho} \\
\mathcal{F}_\rho[\![P]\!] &= \mathsf{lfp}\,\mathcal{P}_\rho[\![P]\!] = \mathcal{P}_\rho[\![P]\!] \uparrow \omega
\end{aligned}
$$

## Semantica operazionale

$$
\frac{X \in \rho(\mathbb{D}), \qquad X \neq X \mathbin{\tilde{\bowtie}} \tilde{\mu}(\rho(\mathsf{tree}(P)))}{X \overset{P}{\longmapsto}_\rho X \mathbin{\tilde{\bowtie}} \tilde{\mu}(\rho(\mathsf{tree}(P)))}
$$

$$
\tilde{\mu}(X) = \tilde{\sum} \{(A \mathbin{\tilde{\cdot}} X|_{\mathbb{I}}) \mathbin{\tilde{\times}} \rho(Id)\}_{A \in \mathsf{Atoms}}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!] &= \tilde{\sum} \{X \mid \rho(Id|_{\boldsymbol{G}}) \overset{P}{\longmapsto}{}^*_\rho X\} \\
\mathcal{O}_\rho[\![P]\!] &= \Big[\tilde{\sum} \{\mathcal{B}[\![p(\boldsymbol{x}) \ \texttt{in} \ P]\!]\}_{p(\boldsymbol{x}) \in \mathsf{Goals}}\Big]_{\equiv_\rho}
\end{aligned}
$$

# Osservabili perfetti e denotazionali

Gli osservabili sono *denotazionali* quando:

$$\begin{aligned}
\rho(A \cdot D) &= \rho(A \cdot \rho(D)) \\
\rho(D_1 \times D_2) &= \rho(\rho(D_1) \times \rho(D_2)) \\
\rho(D_1 \bowtie D_2) &= \rho(D_1 \bowtie \rho(D_2))
\end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\rho(\mathcal{Q}[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]) = \mathcal{Q}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]$$
$$\rho(\mathcal{F}[\![P]\!]) = \mathcal{F}_\rho[\![P]\!]$$

$$\mathcal{F}_\rho[\![P]\!] \sqsubseteq \mathcal{O}_\rho[\![P]\!]$$
$$\mathcal{Q}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!] \sqsubseteq \mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]$$

Se in più vale

$$\rho(D_1 \bowtie D_2) = \rho(\rho(D_1) \bowtie \rho(D_2))$$

allora si dicono *perfetti*. Per essi valgono

$$\rho(\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]) = \mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G} \ \texttt{in} \ P]\!]$$
$$\rho(\mathcal{O}[\![P]\!]) = \mathcal{O}_\rho[\![P]\!]$$

e tutti i risultati per la semantica concreta.

# Osservabili additivi

Un osservabile $\rho$ è additivo sse può essere scritto come

$$\rho^*(S) = \{d' \in \mathsf{Derivs}_{/\overset{\mathsf{der}}{\approx}} \mid \exists d \in S \text{ t.c. } d' \propto d\}$$

La relazione $\propto$ può sempre essere scelta in modo che

1. $d \propto d' \Rightarrow \mathsf{first}(d) = \mathsf{first}(d')$,

2. $d \propto d' \Rightarrow \forall d_1 \preceq d \ \exists d'_1 \preceq d'$ t.c. $d_1 \propto d'_1$,

3. $\propto$ è riflessiva e transitiva,

4. $d \propto d' \Rightarrow \partial_\sigma(d) \propto \partial_\sigma(d')$ per ogni renaming $\sigma$

$\propto$ è una specie di relazione di *astrazione* tra derivazioni.

# Osservabili operazionali

Un osservabile $\rho$ è detto *operazionale* quando

$$\rho(A \cdot D) = \rho(A \cdot \rho(D))$$
$$\rho(D_1 \times D_2) = \rho(\rho(D_1) \times \rho(D_2))$$
$$\rho(D_1 \bowtie D_2) = \rho(\rho(D_1) \bowtie D_2)$$

Un esempio:

$$\begin{aligned} \alpha^*(S) = \big\{ \langle R, n\rangle \mid \exists d = \boldsymbol{G}_0 \to \ldots \to \boldsymbol{G}_n \in S \text{ t.c.} \\ \boldsymbol{G}_0 \leq p(\boldsymbol{x}) \text{ per un opportuno } p \in \Pi \\ \text{result}(d) = R \text{ e } \#\{i \mid \text{first}(\boldsymbol{G}_i) \leq p(\boldsymbol{x})\} = n \big\} \end{aligned}$$

se $S \in WFS_A$ ed $A$ atomo, altrimenti

$$\alpha^*(S) = \{R \mid \exists d \in S \text{ t.c. } \text{result}(d) = R\}$$

Un osservabile operazionale e denotazionale è anche perfetto.

# Proprietà degli oss. operazionali

Se $\rho$ è un osservabile operazionale abbiamo:

- $\mathcal{B}_\rho[\![A \texttt{ in } P]\!] = A \,\tilde{\cdot}\, \mathcal{O}_\rho[\![P]\!]$
  $$\mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2 \texttt{ in } P]\!] = \mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G}_1 \texttt{ in } P]\!] \;\tilde{\times}\; \mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G}_2 \texttt{ in } P]\!],$$

- $P_1 \approx_\rho P_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_\rho[\![P_1]\!] = \mathcal{O}_\rho[\![P_2]\!]$,

- $\rho(\mathcal{B}[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!]) = \mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!]$
  $\rho(\mathcal{O}[\![P]\!]) = \mathcal{O}_\rho[\![P]\!]$,

- $\mathcal{O}_\rho[\![P]\!] \sqsubseteq \mathcal{F}_\rho[\![P]\!]$
  $\mathcal{B}_\rho[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!] \sqsubseteq \mathcal{Q}_\rho[\![\boldsymbol{G} \texttt{ in } P]\!]$

# Il reticolo degli osservabili

Studiando la proprietà di precisione degli uco in rapporto agli operatori lub e glb si è ottenuto:

- se $\{\rho_i\}_{i \in I}$ sono uco precisi per l'operatore op, anche $\prod_{i \in I} \rho_i$ è preciso per op,

- se, in più, op è additiva, allora $\bigsqcup_{i \in I} \rho_i$ è preciso per op.

Si dimostra, di conseguenza:

1. Gli osservabili sono un sottoreticolo degli uco su $\mathbb{D}$,

2. Osservabili perfetti, denotazionali e operazionali sono sottoreticoli del reticolo di tutti gli osservabili.

# Risultati negativi

Il dominio $\mathbf{Obs}$ è molto complesso. Ad esempio:

$$\rho(D) = D \bowtie \{d \mid \exists \theta, \boldsymbol{G} \text{ t.c. } \mathsf{first}(d) = (t(\boldsymbol{x})\theta, \boldsymbol{G})\}$$

è un osservabile perfetto più astratto dell'osservabile dei risultanti con risposte ground. Inoltre:

$$\rho(D) = D + \{t(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\epsilon}^{n} t(\boldsymbol{x}) \mid t(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{\epsilon} t(\boldsymbol{x}) \in D\}$$

è un osservabile per cui nessuno degli operatori semantici è preciso ma che nonostante ciò ha tutte le proprietà di composizionalità ed eguaglianza tra semantica top-down e bottom-up.

# Modello di Herbrand

Restringiamoci agli osservabili che sono concretizzazioni dell'osservabile di successo di Herbrand, $\rho_h^*(S)$ uguale a:

$$\begin{cases} \emptyset & \text{se } S = \emptyset \\ \{\boldsymbol{G} \longrightarrow^* \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{B} \neq \Box\} & \text{se } S \neq \emptyset \text{ non ha refutazioni} \\ \top_{\mathsf{WFS}_{\boldsymbol{G}}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oppure con le inserzioni di Galois,

$$\alpha^*(S) = \begin{cases} \bot & \text{se } S = \emptyset \\ \boxslash & \text{se } S \neq \emptyset \text{ non ha refutazioni} \\ \top & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha che

- $\rho_h$ è preciso sul secondo argomento di $\bowtie$,

- $\rho_h$ è additivo, con $\propto$ così definita:

$$d \propto d' \Leftrightarrow \mathsf{last}(d) \neq \Box \vee \mathsf{last}(d') = \Box$$

# Max. osservabile denotazionale

Definiamo l'osservabile delle *risposte calcolate ground*:

$$\rho_g^*(S) = \{d = \boldsymbol{G} \xrightarrow{\theta}{}^* \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{B} = \Box \Rightarrow \forall \boldsymbol{G}' \leq \boldsymbol{G}\theta,$$
$$\boldsymbol{G}' \text{ ground}, \exists d' = \boldsymbol{G} \xrightarrow{\theta'}{}^* \Box \in S \text{ t.c. } \boldsymbol{G}' \leq \boldsymbol{G}\theta'\}$$

ovvero, con le inserzioni di Galois:

$$\alpha_g^*(S) = \{\boldsymbol{G}\gamma \text{ ground} \mid \exists d = \boldsymbol{G} \xrightarrow[\theta]{}{}^* \Box \in S \text{ t.c.}$$
$$\boldsymbol{G}\gamma \leq \boldsymbol{G}\theta\}$$

se $S \neq \emptyset$, altrimenti $\alpha_g^*(\emptyset) = \bot$.

Si dimostra che

- $\rho_g$ è un osservabile denotazionale,
- $\rho_g$ è il più astratto osservabile denotazionale tra le concretizzazioni di $\rho_h$.

# Max. osservabile perfetto

Definiamo l'osservabile dell'*ultimo goal delle derivazioni*.

$$\rho_l^*(S) = \text{gwf}\{d = \boldsymbol{G} \longrightarrow^* \boldsymbol{B} \mid \exists d' \in S \text{ t.c. } \\ \text{last}(d') = \Box \vee \boldsymbol{B} = \text{last}(d')\}$$

Il trattamento asimmetrico di $\Box$ è dovuto al fatto che $\bowtie$ è estensionale sul primo argomento.

- $\rho_l$ è preciso per $\bowtie$,
- $\rho_l$ è il più astratto osservabile preciso per $\bowtie$, tra quelli minori di $\rho_h$

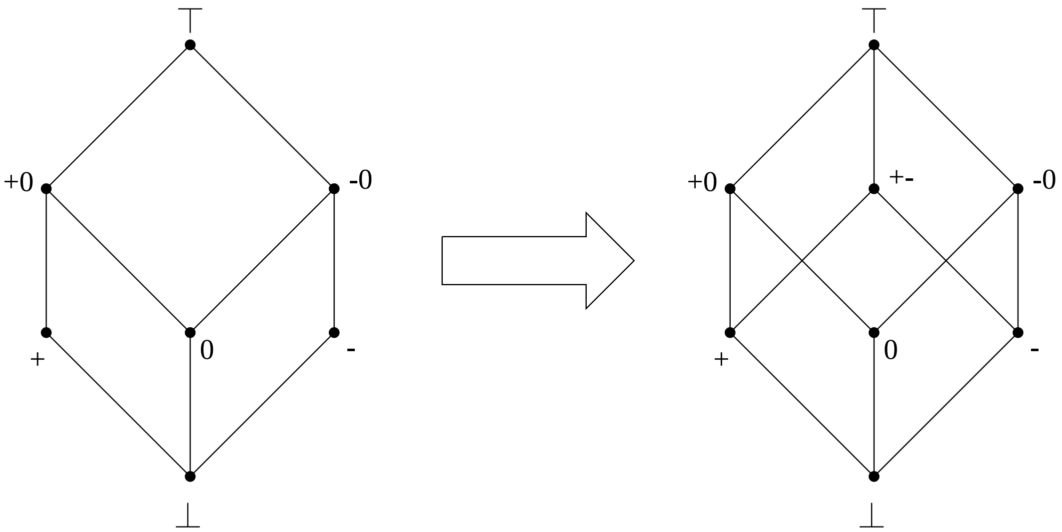
**Corollario 1** *Il più astratto osservabile perfetto è concretizzazione di* $\rho_g \sqcap \rho_l$.

# Completamento disgiuntivo

Sia $C$ un reticolo completo, $\rho$ un uco su di esso. Definiamo:

$$\mho\rho = \bigsqcup\{\rho' \sqsubseteq \rho \mid \rho' \text{ è additivo}\}$$

Ad esempio, per l'analisi dei segni:




Sia poi

$$T(S) = \mathrm{lms}\Big\{\bigsqcup S' \mid S' \subseteq S, S' \neq \emptyset\Big\}$$

si dimostra che

$$(\mho\rho)(C) = \bigcap\{S' \supseteq \rho(C) \mid T(S') = S'\}$$

**Teorema 2** *Se* op additivo è *preciso per $\rho$ lo è anche per $\mho\rho$.*

# Completamento disgiuntivo

Come conseguenza si ha:

**Teorema 3** *Il complet. disgiuntivo di un osservabile perfetto, operazionale o denotazionale <u>è un osservabile</u> della stessa classe.*

Definiamo l'osservabile delle *istanze di risposte calcolate*. Per ogni $S \in \mathsf{WFS}_{\boldsymbol{G}}$:

$$\rho_c^*(S) = \{d \mid \mathsf{first}(d) = \boldsymbol{G},\ \exists d' \in S \text{ t.c.}$$
$$\mathsf{last}(d) \neq \Box \ \vee\ \mathsf{answer}(d) \leq \mathsf{answer}(d')\}$$

ovvero

$$\alpha_g^*(S) = \{\boldsymbol{G}\gamma \text{ ground} \mid \exists d = \boldsymbol{G} \xrightarrow{\theta}{}^* \Box \in S$$
$$\text{t.c. } \boldsymbol{G}\gamma \leq \boldsymbol{G}\theta\}$$

Si dimostra che

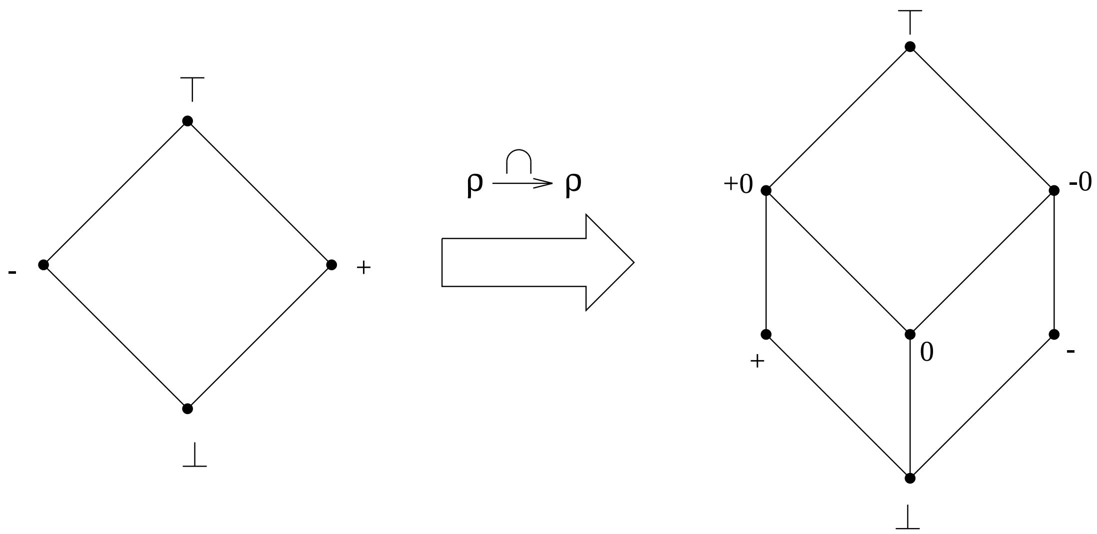
$$\rho_c = \mho \rho_h$$

# Dipendenze funzionali

Dati $\rho_1$ e $\rho_2$ uco su $C$ e $\odot$ operatore binario additivo a sinistra, poniamo $(\rho_1 \rightarrow^{\odot} \rho_2)(x)$ uguale a

$$\bigsqcup\{x' \in C \mid \rho_2(x' \odot y) \sqsubseteq \rho_2(x \odot y)\ \forall y \in \rho_1(C)\}$$

Ad esempio, se $\odot$ è l'operatore $\cap$ su $2^{\mathbb{Z}}$ e $\rho$ l'uco per l'analisi dei segni:




**Teorema 4** *Nelle ipotesi di sopra,* $\rho_1 \rightarrow^{\odot} \rho_2 \sqsupseteq \bigsqcup\{\rho' \sqsubseteq \rho_2 \mid \rho'$ *è preciso sul primo arg. di* $\odot\}$

# Dipendenze funzionali

Come conseguenza si ha che se $\rho$ è un osservabile:

1. $\mathrm{Dep}^{\bowtie}\rho$ è un osservabile, raffinamento di $\rho$,

2. se $\rho$ è operazionale, allora $\mathrm{Dep}^{\bowtie}\rho = \rho$,

3. se $\rho$ è denotazionale, allora $\mathrm{Dep}^{\bowtie}$ è il max osservabile minore di $\rho$ per cui $\bowtie$ è preciso.

Ad esempio, abbiamo $\mathrm{Dep}^{\bowtie}\rho_h = \rho_l$.