Frontiera di fallimento ottimale a tempi discreti

Agata Altieri
Universitá di Parigi VI
4, place Jussieu, F-75005 Paris, France
e-mail: `Agata.ALTIERI@cicrp.jussieu.fr`

Tiziano Vargiolu
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Universitá di Padova
via Belzoni 7, I-35131 Padova, Italy
e-mail: `vargiolu@galileo.math.unipd.it`

Pescara, 29 gennaio 2000

Abstract

In questo intervento risolveremo il problema di determinare il tempo di fallimento di un emittente in modo da massimizzare il suo valore totale con la condizione che il valore delle azioni rimanga positivo. Presenteremo anche alcune applicazioni al caso binomiale.

1 Il modello

Supponiamo che nel mercato ci siano un titolo senza rischio, un titolo V che rappresenta il valore dell'azienda (titoli "primitivi") e un bond della stessa azienda (rischioso). Supponiamo che il fallimento possa avvenire solo in istanti discreti $i = 1, \ldots, N$.
Valore dell'azienda:

$$V_{n+1} = V_n \omega_n, \quad n = 0, \cdots, N$$

$\{\omega_n\}_{n \in \{0,1,\cdots,N\}}$ i.i.d. positive, $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione generata da V.
Supponiamo che il mercato sia libero da arbitraggi e completo, cioé $= \exists! \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ m.m.e. e ci si possono fare prezzi.
Esempi:

- ω_n binomiali
- modello che sia una discretizzazione di un modello completo a tempi continui (non siamo interessati all'hedging)

V é una catena di Markov con operatore di transizione T definito da

$$Tf(v) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(V_{n+1}) \mid V_n = v]$$

Chiamiamo τ il tempo della bancarotta. Se la bancarotta non succede prima di N, poniamo "artificialmente" $\tau = N + 1$.
Consideriamo ora un generico claim che paghi una cedola $C_n \geq 0$ ad ogni data n precedente la maturitá N e la bancarotta τ, e $J(V_\tau)$ se c'é bancarotta. Se chiamiamo F il suo valore, abbiamo:

$$F(V_n, \tau) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=n}^{\tau-1} \frac{C}{(1+r)^{\tau-i}} + \frac{J(V_\tau)}{(1+r)^{i-n}} 1_{\{\tau \leq N\}} \middle| \mathcal{F}_n \right]. \tag{1}$$

supposto che la ditta in n non sia ancora fallita. Poiché V é un processo di Markov, la quantitá a secondo membro é in effetti una funzione deterministica di V_n e τ.
I claim che ci interessano (Leland 1994) sono 3:

Costi di bancarotta: "titolo" che non paga cedole e paga il valore αV_τ in caso di bancarotta, con $0 < \alpha < 1$. Allora usando (1) il valore dei costi di bancarotta é

$$BC(V_n, \tau) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\alpha V_\tau}{(1+r)^{\tau-n}} 1_{\{n \leq \tau \leq N\}} \middle| \mathcal{F}_n \right] \tag{2}$$

Debito: pagamento di cedole C_n fino alla maturitá o al fallimento, principale P alla data finale, e $(1-\alpha)V_\tau$ (valore dell'azienda $-$ costi di bancarotta) in caso di fallimento. Usando (1) il valore del debito é:

$$\begin{aligned} D(V_n, \tau) \;&=\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=n}^{\tau-1} \frac{C_i}{(1+r)^{i-n}} + \frac{(1-\alpha)V_\tau}{(1+r)^{\tau-n}} \mathbf{1}_{\{n \leq \tau \leq N\}} + \right. \\ &\left. + \frac{P}{(1+r)^{\tau-n}} 1_{\{\tau = N+1\}} \middle| \mathcal{F}_n \right] \end{aligned}$$

Benefici fiscali: γC_n, con $0 < \gamma < 1$, su ogni cedola. Usando (1), il valore dei benefici fiscali é:

$$TB(V_n, \tau) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=n}^{\tau-1} \frac{\gamma C_i}{(1+r)^{i-n}} \middle| \mathcal{F}_n \right]$$

Valore totale dell'azienda:

$$v(V_n, \tau) \; = \; V_n + TB(V_n, \tau) - BC(V_n, \tau)$$

Valore delle azioni ("titolo derivato"):

$$E_n = E(V_n, \tau) = v(V_n, \tau) - D(V_n, \tau)$$

2 Il problema

Supponiamo che la ditta possa scegliere τ, e che lo faccia in modo da massimizzare v con la condizione che $E_n \geq 0$ su $\{n < \tau\}$ per ogni $n = 1, \ldots, N$. Abbiamo quindi il problema di arresto ottimale:

$$W_0(V_0) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_0} v(V_0, \tau) \tag{3}$$

dove

$$\mathcal{T}_n \; = \; \left\{ \begin{array}{c} \tau \text{ tempo di arresto a valori in } \{n, \cdots, N+1\} \\ \text{tale che } \{\tau > k\} \subseteq \{E_k > 0\} \quad \forall k = n, \cdots N \end{array} \right\}$$

(3) non é un tipico problema di arresto ottimale poiché abbiamo un vincolo, quindi non possiamo usare risultati classici (Shiryaev 1980), ma si deve sviluppare un metodo ad hoc che usa la programmazione dinamica.

Teorema 1. *Definiamo le funzioni:*

$$
\begin{aligned}
h_N(V) &= (V - P - (1-\gamma)C_N)^+ \\
\overline{W}_N(V) &= \begin{cases} V(1-\alpha) & se\ h_N(V) = 0 \\ \\ V + \gamma C_N & se\ h_N(V) > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

e per $k = N-1, \cdots, 0$*:*

$$
\begin{aligned}
h_k(V) &= \left(\frac{1}{1+r} T h_{k+1}(V) - (1-\gamma)C_k \right)^+ \\
\overline{W}_k(V) &= \begin{cases} \gamma C_k + \dfrac{1}{1+r} T W_{k+1}(V) & se\ h_k(V) > 0 \\ \\ V(1-\alpha) & se\ h_k(V) = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Allora il tempo di arresto ottimale é

$$
\hat{\tau} = \begin{cases} \inf\{j \mid V_j \leq v_j^*\} \\ \\ N+1 \quad se\ l'insieme\ sopra\ é\ vuoto \end{cases} \tag{4}
$$

dove v_j^* *é l'unica soluzione dell'equazione*

$$
T h_{j+1}(v_j^*) = (1+r)(1-\gamma)C_j \tag{5}
$$

e:

$$
\begin{aligned}
\overline{W}_0(V_0) &= W_0(V_0) = v(V_0, \hat{\tau}) = \max_{\tau \in \mathcal{T}_0} v(V_0, \tau) \\
E_n(V_0) &= h_n(V_0)
\end{aligned}
$$

Nota 1. *Se avessimo da risolvere un problema di arresto ottimale*

$$W_0(V_0) = \max_{\tau \le N+1} \mathbb{E}\left[\frac{g(V_\tau)}{(1+r)^\tau} + \sum_{i=0}^{\tau-1} \frac{c(V_i)}{(1+r)^i}\right]$$

senza vincoli su τ*, allora la soluzione sarebbe analoga: si definisce* $\overline{W}_N, \overline{W}_{N-1}, \cdots, \overline{W}_0$*:*

$$\overline{W}_N(V) = g(V)$$

$$\overline{W}_k(V) = \max\left(c(V) + \frac{1}{1+r} T\overline{W}_{k+1}(V), g(V)\right)$$

Allora il tempo di arresto ottimale é

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \inf\{j \mid \overline{W}_j(V_j) \le g(V_j)\} \\ \\ N+1 \quad \textit{se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases} \tag{6}$$

e:

$$\overline{W}_0(V_0) = W_0(V_0) = \mathbb{E}\left[\frac{g(V_{\hat{\tau}})}{(1+r)^{\hat{\tau}}} + \sum_{i=0}^{\hat{\tau}-1} \frac{c(V_i)}{(1+r)^i}\right]$$

Corollario 1. *Se $C = 0$ e le variabili aleatorie ω_n hanno supporto uguale a $\mathbb{R}^+$, allora il tempo di arresto ottimale é*

$$\begin{cases} \hat{\tau} = N & \text{se } V_N \leq P \\ \\ \hat{\tau} = N+1 & \text{se } V_N > P \end{cases}$$

e abbiamo:

$$\begin{aligned}
W_n(V_n) &= V_n - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\alpha V_N}{(1+r)^{N-n}} 1_{\{V_N \leq P\}} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
D_n(V_n) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(1-\alpha) V_N}{(1+r)^{N-n}} 1_{\{V_N \leq P\}} + \frac{P}{(1+r)^{N-n}} 1_{\{V_N > P\}} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
TB_n(V_n) &= 0 \\
E_n(V_n) &= V_n - \\
&\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}} 1_{\{V_N \leq P\}} + \frac{P}{(1+r)^{N-n}} 1_{\{V_N > P\}} \middle| \mathcal{F}_n \right]
\end{aligned}$$

Parallelo col modello di Merton (1973): se non ci sono cedole intermedie, allora la regola ottimale per la ditta é di aspettare fino alla maturitá e poi fallire sse $V_N < P$. Inoltre se

$$w_n = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{T}{N} + \sigma W_n \right)$$

con $W_n \sim N(0, T/N)$, otteniamo esattamente gli stessi prezzi di Merton per D ed E.

3 Il modello binomiale

Tentiamo di applicare i risultati al modello binomiale per ottenere risultati analoghi a Leland (1994) e Leland-Toft (1996), che usano un modello lognormale: infatti scegliendo opportunamente i coefficienti del modello binomiale si puó approssimare un modello lognormale o un modello a salti.

$$V_{n+1} = V_n(1 + B_n)$$

con $\mathbb{Q}\{B_n = u\} = p$, $\mathbb{Q}\{B_n = d\} = 1-p$, $0 < p < 1$. Siccome il valore scontato di V deve essere una martingala, abbiamo

$$\begin{aligned} p &= \frac{r-d}{u-d} \\ 1-p &= \frac{u-r}{u-d} \end{aligned}$$

con $-1 < d < r < u$. L'operatore di transizione T stavolta é tale che

$$T\varphi(x) = p\varphi(x(1+u)) + (1-p)\varphi(x(1+d)) \tag{7}$$

Applichiamo il teorema 1 al caso $C = 0$. Le funzioni h_n sono:

$$\begin{aligned} h_N(V) &= (V-P)^+ \\ h_{N-n}(V) &= \frac{1}{(1+r)^n} T^n h_N(V) \end{aligned}$$

allora

$$h_{N-1}(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } V < \dfrac{P}{1+u} \\ \left(\dfrac{p}{1+r}\,(V(1+u)-P)\right) & \text{se } \dfrac{P}{1+u} \leq V < \dfrac{P}{1+d} \\ \left(V - \dfrac{P}{1+r}\right) & \text{se } V \geq \dfrac{P}{1+d} \end{cases}$$

e cosí via *(disegno)*.
Il tempo di arresto ottimale é

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \inf \left\{ k \text{ tale che } \; V_k \leq \dfrac{P}{(1+u)^{N-k}} \right\} \\ N+1 \;\; \text{se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

Applichiamo ora il teorema 1 al caso $C_n \neq 0$. La forma delle h_n é analoga. Se peró vale la condizione

$$(1-\gamma)C > \frac{P(r-d)}{1+2d+rd} \tag{8}$$

allora

$$h_k(V) = \left(V - \sum_{i=0}^{N-k} \frac{(1-\gamma)C}{(1+r)^i} - \frac{P}{(1+r)^{N-k}} \right)^+$$

e quindi

$$W_k(V) = \begin{cases} (1-\alpha)V \quad \text{se } 0 < V < \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k} \frac{(1-\gamma)C}{(1+r)^i} + \frac{P}{(1+r)^{N-k}} \\ \\ V + \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k} \frac{\gamma C}{(1+r)^i} \quad \text{se } V > \dots \end{cases}$$

Quindi il tempo di arresto ottimale é:

$$\hat{\tau} = \begin{cases} \inf \left\{ k \text{ tali che } V_k \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k} \frac{(1-\gamma)C}{(1+r)^i} + \frac{P}{(1+r)^{N-k}} \right\} \\ \\ N+1 \text{ se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

Notiamo che in questo caso la barriera dipende dal tempo.

3.1 Approssimazione di un modello lognormale

Prendiamo una maturitá T e discretizziamo l'intervallo $[0,T]$ in N intervalli lunghi $\frac{T}{N}$. Allora, se poniamo

$$C_n = \frac{C}{N}, \quad r_n = \frac{r}{N}, \quad u = \frac{r}{N} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad d = \frac{r}{N} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

allora il processo $(V_{[\frac{t}{N}]})_t$ approssima un processo lognormale

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$$

(in particolare per $N \to \infty$ si ha convergenza in legge). La condizione (8) si puó riscrivere come:

$$(1-\gamma)\frac{C}{\sqrt{N}} > \frac{P\sigma}{1 + o(N^{-1/2})}$$

quindi per $N \to \infty$ abbiamo $P\sigma < 0$, che non é mai verificato. Questo significa che se vogliamo approssimare un modello lognormale le h_n sono "complicate".

3.2 Approssimazione di un modello a salti

Come prima, prendiamo una maturitá T e discretizziamo l'intervallo $[0, T]$ in N intervalli lunghi $\frac{T}{N}$. Allora, se poniamo

$$C_n = \frac{C}{N}, \quad r_n = \frac{r}{N}, \quad u = b, \quad d = 0$$

allora il processo $(V_{[\frac{t}{N}]})_t$ approssima un processo di Poisson geometrico

$$S_t = S_0(1+b)^{N_t}$$

(in particolare per $N \to \infty$ si ha convergenza in legge) dove N é un processo di Poisson di intensitá r/b. La condizione (8) si puó riscrivere come:

$$(1-\gamma)C > Pr$$

Se questa condizione é verificata (ricordiamo che per ragioni di arbitraggio abbiamo che $C > Pr$), allora la forma delle h_n é "semplice", e se vogliamo approssimare un modello di Poisson geometrico le h_n sono "semplici" e abbiamo una soluzione esplicita. Se invece la condizione non é verificata, le h_n sono "complicate".

References

[1] H. J. Kushner, *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*, Academic Press, 1977

[2] H. E. Leland, *Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure*, The Journal of Finance **49**, 1213–1252 (1994)

[3] H. E. Leland and K. B. Toft, *Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads*, The Journal of Finance **51**, 987–1019 (1996)

[4] R. C. Merton, *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, The Journal of Finance **29**, 449–470 (1974)

[5] F. Modigliani and M. Miller, *The cost of capital corporation finance, and the theory of investment*, American Economic Review **48**, 261–277 (1958)

[6] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale methods in financial modelling*, Springer, 1997

[7] A. N. Ŝirjaev, *Statistical Sequential Analysis*, American Mathematical Society, 1973