

### SOLUZIONE COMPITO N.3

ESERCIZIO 1. i) Calcolare il dominio di definizione della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\ln(4x^2 - 15)}$$

ii) Provare, inoltre, che la funzione  $f(x)$  è pari.

SOLUZIONE

i) Il dominio  $D$  è definito dal sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \ln(4x^2 - 15) \geq 0 \\ 4x^2 - 15 > 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 - 15 \geq 1 \\ 4x^2 - 15 > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$4x^2 - 15 \geq 1 \iff 4x^2 - 16 \geq 0 \iff x^2 - 4 \geq 0.$$

Risolvendo l'ultima disequazione si ha

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) .$$

ii) Per provare che  $f$  è pari è sufficiente osservare che

$$f(-x) = \sqrt{\ln(4(-x)^2 - 15)} = \sqrt{\ln(4x^2 - 15)} = f(x) .$$

ESERCIZIO 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \tan(3x^3)}{(e^{2x} - 1)^3}.$$

SOLUZIONE

Per  $x$  che tende a zero si ha che

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + \tan(3x^3)}{(e^{2x} - 1)^3} &= \frac{x^4 + 3x^3 + o(x^3)}{(1 + 2x + o(x) - 1)^3} = \frac{3x^3 + o(x^3)}{(2x + o(x))^3} \\ &= \frac{x^3(3 + o(1))}{(x(2 + o(1)))^3} = \frac{x^3(3 + o(1))}{x^3(8 + o(1))} = \frac{3 + o(1)}{8 + o(1)} \\ &= \frac{3}{8}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \tan(3x^3)}{(e^{2x} - 1)^3} = \frac{3}{8}.$$

ESERCIZIO 3. Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = e^{-x} (x^2 + 3x + 1) - 8 .$$

In particolare, determinare: il dominio di definizione; eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui); continuità e derivabilità; massimi e minimi locali o globali; convessità; tracciare il grafico della funzione.

SOLUZIONE

**Dominio.** Il dominio di definizione è  $\mathbb{R}$  in quanto la funzione è prodotto e somma di funzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Asintoti.** Osservare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} x^2 (1 + o(1)) = +\infty ,$$

e che non c'è asintoto obliquo a  $-\infty$ . Infatti per  $x \rightarrow -\infty$  si ha

$$\frac{f(x)}{x} = e^{-x} \cdot \frac{x^2(1 + o(1))}{x} = e^{-x} x (1 + o(1)).$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty .$$

Invece, a  $+\infty$  c'è un'asintoto orizzontale di equazione  $y = -8$  in quanto per il limite notevole tra le potenze e l'esponenziale si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = e^{-x} (x^2 + 3x + 1) = 0$$

**Continuità, derivabilità, monotonia.** La funzione è continua e derivabile infinite volte nel suo dominio di definizione in quanto è somma e prodotto di funzioni che sono derivabili infinite volte. Quindi possiamo studiare la monotonia della funzione studiando il segno della derivata prima. Osserviamo che

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2+3x+1)+e^{-x}(2x+3) = e^{-x}(-x^2-3x-1+2x+3) = e^{-x}(-x^2-x+2) .$$

Dato che l'esponenziale è strettamente maggiore di zero si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff (-x^2 - x + 2) \geq 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ se } x \in (-2, 1) \\ f'(x) &< 0 \text{ se } x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty) \\ f'(x) &= 0 \text{ se } x = -2, 1. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è strettamente decrescente negli intervalli  $(-\infty, -2)$  e  $(1, \infty)$ ; strettamente crescente nell'intervallo  $(-2, 1)$ ; il punto  $x = -2$  è un minimo locale, mentre  $x = 1$  è un massimo locale. In particolare

$$f(-2) = -e^2 - 8 \sim -17, \quad f(3) = e^{-1} 5 - 8 \sim -6.3$$

**Convessità.** Dato che la funzione è derivabile infinite volte studiamo la convessità della funzione studiando il segno della derivata seconda.

$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 - x + 2) + e^{-x}(-2x - 1) = e^{-x}(x^2 + x - 2 - 2x - 1) = e^{-x}(x^2 - x - 3)$$

Quindi il segno della derivata seconda dipende esclusivamente del segno di  $(x^2 - x - 3)$ . Quindi

$$f''(x) > 0 \text{ se } x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty)$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$f''(x) = 0 \text{ se } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Quindi  $f$  è convessa negli intervalli  $(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2})$  e  $(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty)$ ; è concava nell'intervallo  $(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$ . I punti  $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$  e  $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$  sono punti di flesso.

ESERCIZIO 4. Data la funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \ln(1+x) + 5x + 4 .$$

i) Calcolare il dominio di definizione e provare che  $f$  è invertibile.

ii) Provare che  $f^{-1}$  è derivabile in  $y = 4$  e calcolare il limite

$$\lim_{y \rightarrow 4} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(4)}{y - 4} .$$

SOLUZIONE

i) Per il calcolo del dominio, l'unica condizione da imporre é che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente maggiore di zero. Quindi

$$1 + x > 0 \iff x > -1 ,$$

ossia, il dominio di definizione è l'intervallo

$$(-1, +\infty) .$$

Osservare inoltre che la funzione è somma di funzioni strettamente crescenti. Quindi  $f$  è invertibile.

ii) Come prima cosa si osserva che  $f(x)$  è continua e derivabile nel dominio di definizione in quanto somma di funzioni continue e derivabili. Allora, dato che  $f$  è continua ed invertibile in un'intervallo,  $f^{-1}$  è continua. Inoltre,  $f^{-1}$  è anche derivabile nel suo dominio di definizione. Osserviamo infatti che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x} + 5 , \quad x \in (-1, +\infty)$$

da cui si deduce che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in (-1, \infty)$ . Sono quindi verificate le ipotesi del teorema della derivata funzione inversa, quindi  $f^{-1}$  è derivabile in ogni punto del suo dominio. Infine, osservare che  $f(x) = 4$  se, e solo se,  $x = 0$  e che

$$f'(0) = 7 .$$

Usando la formula della derivata della funzione inversa

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} , \text{ per } y = f(x) ,$$

si ottiene

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{7} .$$

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 4} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(4)}{y - 4} = \frac{1}{7} ,$$

in quanto tale limite non è nient'altro che la definizione di derivata della funzione inversa in  $y = 4$ .