

## SOLUZIONE COMPITO N.2

ESERCIZIO 1. i) Calcolare il dominio di definizione della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\ln(-2x^2 + 33)}$$

ii) Provare, inoltre, che la funzione  $f(x)$  è pari.

SOLUZIONE

i) Il dominio  $D$  è definito dal sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \ln(-2x^2 + 33) \geq 0 \\ -2x^2 + 33 > 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -2x^2 + 33 \geq 1 \\ 3x^2 - 26 > 0. \end{cases}$$

Quindi

$$-2x^2 + 33 \geq 1 \iff -2x^2 + 32 \geq 0 \iff -x^2 + 16 \geq 0.$$

Risolvendo l'ultima disequazione si ha

$$D = [-4, 4].$$

ii) Per provare che  $f$  è pari è sufficiente osservare che

$$f(-x) = \sqrt{\ln(-2(-x)^2 + 33)} = \sqrt{\ln(-2x^2 + 33)} = f(x).$$

ESERCIZIO 2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - \sin(3x^6)}{(1 - \cos(2x))^3} .$$

SOLUZIONE

Per  $x$  che tende a zero si ha che

$$\begin{aligned} \frac{x^7 - \sin(3x^6)}{(1 - \cos(2x))^3} &= \frac{x^7 - 3x^6 + o(x^6)}{(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2))^3} = \frac{-3x^6 + o(x^6)}{(\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2))^3} \\ &= \frac{x^6(-3 + o(1))}{(x^2(2 + o(1)))^3} = \frac{x^6(-3 + o(1))}{x^6(8 + o(1))} = \frac{-3 + o(1)}{8 + o(1)} \\ &= -\frac{3}{8}(1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 - \sin(3x^6)}{(1 - \cos(2x))^3} = -\frac{3}{8} .$$

ESERCIZIO 3. Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = e^x (x^2 - 7x + 13) + 8 .$$

In particolare, determinare: il dominio di definizione; eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui); continuità e derivabilità; massimi e minimi locali o globali; convessità; tracciare il grafico della funzione.

SOLUZIONE

**Dominio.** Il dominio di definizione è  $\mathbb{R}$  in quanto la funzione è prodotto e somma di funzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Asintoti.** Osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ,$$

e che non c'è asintoto obliquo a  $+\infty$ . Infatti per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{f(x)}{x} = e^x \cdot \frac{x^2(1 + o(1))}{x} = e^x x(1 + o(1)).$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty .$$

Invece, a  $-\infty$  c'è un'asintoto orizzontale di equazione  $y = +8$  in quanto per il limite notevole tra le potenze e l'esponenziale si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = e^x (x^2 - 7x + 13) = 0$$

**Continuità, derivabilità, monotonia.** La funzione è continua e derivabile infinite volte nel suo dominio di definizione in quanto è somma e prodotto di funzioni che sono derivabili infinite volte. Quindi possiamo studiare la monotonia della funzione studiando il segno della derivata prima. Osserviamo che

$$f'(x) = e^x (x^2 - 7x + 13) + e^x (2x - 7) = e^x (x^2 - 7x + 13 + 2x - 7) = e^x (x^2 - 5x + 6) .$$

Dato che l'esponenziale è strettamente maggiore di zero si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff (x^2 - 5x + 6) \geq 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \text{ se } x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \\ f'(x) &< 0 \text{ se } x \in (2, 3) \\ f'(x) &= 0 \text{ se } x = 2, 3. \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è strettamente crescente negli intervalli  $(-\infty, 2)$  e  $(3, \infty)$ ; strettamente decrescente nell'intervallo  $(2, 3)$ ; il punto  $x = 2$  è un massimo locale, mentre  $x = 3$  è un minimo locale. In particolare

$$f(2) = e^2 3 + 8 \sim 35, \quad f(3) = e^3 1 + 8 \sim 34$$

**Convessità.** Dato che la funzione è derivabile infinite volte studiamo la convessità della funzione studiando il segno della derivata seconda.

$$f''(x) = e^x (x^2 - 5x + 6) + e^x (2x - 5) = e^x (x^2 - 3x + 1)$$

Quindi il segno della derivata seconda dipende esclusivamente del segno di  $(x^2 - 3x + 1)$ . Quindi

$$f''(x) > 0 \text{ se } x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$$

$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

$$f''(x) = 0 \text{ se } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi  $f$  è convessa negli intervalli  $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$  e  $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ ; è concava nell'intervallo  $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ . I punti  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  sono punti di flesso.

ESERCIZIO 4. Data la funzione

$$f(x) = x^7 + \ln(e + x) + 1 .$$

i) Calcolare il dominio di definizione e provare che  $f$  è invertibile.

ii) Provare che  $f^{-1}$  è derivabile in  $y = 2$  e calcolare il limite

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(2)}{y - 2} .$$

SOLUZIONE

i) Per il calcolo del dominio, l'unica condizione da imporre è che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente maggiore di zero. Quindi

$$e + x > 0 \iff x > -e ,$$

ossia, il dominio di definizione è l'intervallo

$$(-e, +\infty) .$$

Osservare inoltre che la funzione è somma di funzioni strettamente crescenti. Quindi  $f$  è invertibile.

ii) Come prima cosa si osserva che  $f(x)$  è continua e derivabile nel dominio di definizione in quanto somma di funzioni continue e derivabili. Allora, dato che  $f$  è continua ed invertibile in un'intervallo,  $f^{-1}$  è continua. Inoltre,  $f^{-1}$  è anche derivabile nel suo dominio di definizione. Osserviamo infatti che

$$f'(x) = 7x^6 + \frac{1}{e+x} , \quad x \in (-e, +\infty)$$

da cui si deduce che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in (-e, \infty)$ . Sono quindi verificate le ipotesi del teorema della derivata funzione inversa, quindi  $f^{-1}$  è derivabile in ogni punto del suo dominio. Infine, osservare che  $f(x) = 2$  se, e solo se,  $x = 0$  e che

$$f'(0) = \frac{1}{e} .$$

Usando la formula della derivata della funzione inversa

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} , \text{ per } y = f(x) ,$$

si ottiene

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = e .$$

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(2)}{y - 2} = e ,$$

in quanto tale limite non è nient'altro che la definizione di derivata della funzione inversa in  $y = 2$ .