Limiti notevoli e forme indeterminate

1. Utillizzare la continuità, le proprietà algebriche dei limiti finiti ed il teorema del limite di funzioni composte per dedurre i seguenti limiti
   (a) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\tan(x)+sin(x)\sqrt{2}}{4\arctan(4x/\pi)} = \frac{2}{\pi}$
   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{e^x\sqrt[3]{2x^2-5}}{\log(\frac{e^{2x}}{x})+\log(4)} = \frac{3e^4}{8}$
   (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+\cos(x^{-1})}{4+e^{\arctan(x^{-1})}} = \frac{1}{5}$
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+\cos(\cosh(x)-1))}{(\log_3(8+e^x))^2} = \frac{1}{4}$
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x^2)+2e^x}{\log_2((x+2)^3)+6\log_3((x+3)^2)} = \frac{1}{6}$
2. Utilizzando il limite notevole della funzione esponenziale e le proprietà delle funzioni iperboliche dedurre i seguenti limiti
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1$
3. Usare i limiti notevoli (vedi nota 0.1 nell'ultima pagina) e le proprietà algebriche delle funzioni, per dedurre le seguenti formule di approssimzione (Vedere suggerimento ultima pagina esercizi Nota 2)
   (a) $\log(x) = \log(3) + \frac{1}{3}(x-3)(1+o(1))$ per $x \to 3$;
   (b) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})(1+o(1))$ per $x \to \frac{\pi}{4}$.
   (c) $e^x = e^2 + e^2(x-2)(1+o(1))$ per $x \to 2$.
   (d) $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2(1+o(1))$ per $x \to \frac{\pi}{2}$.
4. Provare che le seguenti funzioni sono infinite o infinitesime e calcolarne l'ordine

$\lim_{x\to 0} \log(1+x+x^4)$	[0, ordine 1]
$\lim_{x\to 5} \log(1-(x-5)^2)$	[0, ordine 2]
$\lim_{x\to 3} \log(3)-\log(x)$	[0, ordine 1]
$\lim_{x\to 2} (x^2-4)(e^{x-2}-1)$	[0, ordine 2]
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2}}{\log(\cos(x^{-3}))}$	[$-\infty$, ordine 8]
$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1+3x^2+x^4}-1-3x^3$	[0, ordine 2]
$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\cosh(x)}-1$	[0, ordine 2]
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\cosh(x^{-2})}-1$	[0, ordine 4]
$\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{\cos(x-2)}-\frac{e^x}{e^2}$	[0, ordine 1]
$\lim_{x\to 0} \arctan(\log(1+\sinh(x^2)))$	[0, ordine 2]

5. Dire quali dei seguenti limiti esiste (Sugg. Cercare opportune successioni oppure usare il teorema sul limite destro e sinistro per provare la non esistenza; usare il teorema dl confronto o proprietà limiti infiniti per l'esistenza.)

$\lim_{x\to+\infty}\cos(x^2)$	[non esiste]
$\lim_{x\to+\infty}(\tan(x))^2$	[non esiste]
$\lim_{x\to 3}\frac{\lvert x-3\rvert}{\sin(x-3)}$	[non esiste]
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(x+5)}}{\arctan(x)}$	[non esiste]
$\lim_{x\to+\infty}\cos(x^2)\ e^{-x}$	[esiste = 0]
$\lim_{x\to+\infty}1+(\sin(x))^2\log(1+\frac{1}{x})$	[esiste = 1]
$\lim_{x\to 3}\frac{\lvert x-3\rvert}{\sin(x-3)}e^{(x-3)}$	[non esiste]
$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2(x+5)}}{\arctan(x)}\sin(x)$	[esiste=0]
$\lim_{x\to+\infty}\cos(x^2)+x$	[esiste = $+\infty$]

6. Perchè non si può applicare il teorema del confronto per studiare l'esistenza del limite $\lim_{x\to\infty}\tan(x)\,x^{-1}$? Tale limite esiste ? Suggerimento: considerare le successioni $x_n = 2n\pi$ e

$$y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2} + 2n\pi\ , \qquad n\in\mathbb{N}$$

Osservare che sia x_n e y_n tendono a $+\infty$ e che $\tan(x_n)\,{x_n}^{-1} = 0$ per ogni n. Approssimare il seno ed il coseno con le formule di approssimazione dedotte dai limiti notevoli (nota ad ultima pagina ed esercizio n.3) ossia

$$\sin(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2n^4}(1+o(1))$$

dove si è usata anche la periodicità del seno. Dedurre la corrispondente relazione per il coseno e trarne le conclusioni.

7. Calcolare i seguenti limiti. In caso di limiti infniti o infinitesimi calcolarne l'ordine

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^4)}{\cos(x^{3/2})-1}$ [-∞, ordine 2]

$\lim_{x\to 3} \frac{\log(1-(x-3)^2)+(x-3)^4}{2(x-3)\arctan(x-3)}$ [-1/2]

$\lim_{x\to 2} \frac{(\log(2)-\log(x))^2}{\log(\cosh(x-2))}$ [0, ordine 1]

$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(e^{x-2}-1)}{(x-2)(1-\sqrt[3]{1-(x-2)})}$ [12]

$\lim_{x\to \pi/2} \tan(x)$ [+∞, ordine 1]

$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+3x^2}\log(\cos(x^{-3}))}{\tan(x^{-2})}$ [0, ordine 2]

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x^2+x^4}-1-3x^3}{\sqrt[3]{\cosh(x)}-1}$ [-4]

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2\cosh(x^{-2})} - \sqrt[3]{2}$ [0, ordine 4]

$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-2)}-\frac{e^x}{e^2}}{2\log(x-1)}$ [$-1/2$]

8. Calcolare, usando la relazione $\log(e^x)) = x$ i seguenti limiti. In caso di limiti infniti o infinitesimi calcolarne l'ordine

   $\lim_{x\to 0} (\cosh(x))^{\frac{1}{x^2}}$ [$1/\sqrt{e}$]

   $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{x^3} - 1$ [0, ordine 5]

   $\lim_{x\to +\infty} (\cos(x^{-1})^{\sqrt{x}}$ [1]

   $\lim_{x\to +\infty} (\cos(x^{-1})^{x^2}$ [$1/\sqrt{e}$]

   $\lim_{x\to +\infty} (\cos(x^{-1})^{x^3}$ [0]

Note

0.1 Relazioni di approssimazione

Ricordo che dai limiti notevoli introdotti a lezione (più i limiti notevoli riguardanti le funzioni iperboliche dati per esercizio) ed il teorema limite di fuzioni composte possiamo dedurre le seguenti formule di approsimazione.

Sia $g(x)$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ ,$$

e $g(x) \neq 0$ definitivamente in x_0 allora

$$\boxed{\begin{array}{rcll}
e^{g(x)} & = & 1 + g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\log(1 + g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\sin(g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\cos(g(x)) & = & 1 - \frac{1}{2}(g(x))^2(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\tan(g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\arctan(g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
(1 + g(x))^\alpha & = & 1 + \alpha\, g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\sinh(g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\cosh(g(x)) & = & 1 - \frac{1}{2}(g(x))^2(1 + o(1)) & x \to x_0 \\
\tanh(g(x)) & = & g(x)(1 + o(1)) & x \to x_0 \ .
\end{array}}$$

1 Approssimazione grandezze trigonometriche

Per approssimare il seno in un punto diverso da 0 utiliziamo la formula

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin(\frac{x - y}{2})\cos(\frac{x + y}{2})$$

Quindi, se vogliamo approssimare il seno in $\pi/4$, osserviamo che vale inanzitutto

$$\sin(x) - \sin(\pi/4) = 2\sin(\frac{x - \pi/4}{2})\cos(\frac{x + \pi/4}{2})$$

Dato che $\frac{x-\pi/4}{2}$ tende a zero per $x \to \pi/4$ possiamo utilizzare le relazioni scrtte nella nota di sopra per approsimare $\sin(\frac{x-\pi/4}{2})$. Il coseno, invece, tende a $\cos(\pi/4)$ quindi possiamo scrivere

$$\sin(x) = \sin(\pi/4) + \big(\frac{x-\pi/4}{2}\big)\frac{\sqrt{2}}{2}(1+o(1)) \ , \qquad x \to \pi/4 \ .$$