

# Successioni e calcolo vettoriale

## Successioni

1. Stabilire se le seguenti successioni sono infinite o ininitesime (in alcuni casi utilizzare la formula di Stirling)

$$a_n = \frac{(2n)!}{3^n n^n}$$

$$b_n = \frac{n! 4^n}{n^n}$$

$$c_n = \frac{(n+6)! 2^n}{n^n}$$

$$d_n = \frac{(n-3)!}{n^{100}} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$e_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$$

$$* f_n = \frac{n^n}{(2^n)^n}$$

$$g_n = \frac{(2n)!}{(2n^2)}$$

2. Calcolare il limite per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni, se sono infinite o infinitesime calcolarne l'ordine

$$a_n = \sqrt{n^3 + 8^2} \cdot \frac{6n + (\frac{2}{3})^n}{n(n+8)} ;$$

$$b_n = \frac{(2n^5 3^n + 5n^{10})^2}{\sqrt{81^n + 5n^6}} ;$$

$$c_n = \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^4 ;$$

$$d_n = \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - n^4 ;$$

$$e_n = \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} - 2n^4 ;$$

$$f_n = \sqrt{4n^4 - n^{3/2}} + 2n^4$$

$$g_n = \frac{(n+1)^n n^2 + (n+3)! n^2}{n^n + 6} \cdot (\sqrt{9n^8 + n^2} - 3n^4) ;$$

$$h_n = \frac{n^{2n} (\sqrt{n^2 + n} - n)}{(n+1)^n + 2^n n!} \cdot \frac{1}{(n+1)^n} ;$$

$$i_n = \frac{\sqrt{n^{16} + 2n^6 + n^4}}{n^2} - \frac{n^4 + 1}{n^2} ;$$

$$h_n = n^6 \cdot (\sqrt{n^{12} + 2n^2 + 1}) - (n^2 (n^4 + 1)) .$$

3. Studiare la monotonia delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n+6}{n+5}$$

$$b_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 + 5}$$

$$c_n = \frac{n+3}{n+6} - \frac{2}{n}$$

$$e_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

4. Provare che le seguenti successioni sono definitivamente monotone

$$\begin{aligned} f_n &= n^2 - 2n - 8 & n \in \mathbb{N} \\ g_n &= \frac{|n-12|+8}{n} & n \in \mathbb{N} \\ h_n &= \frac{1}{n^2-2n-8} & n \in \mathbb{N} \setminus \{4\} \end{aligned}$$

5. Utilizzando le successioni definite nei due precedenti esercizi, dire se i seguenti insiemi sono limitati e determinare max/min, sup/inf. (Sugg. per il secondo gruppo di esercizi e per l'insieme  $I_n$ , dividere gli insiemi in parti monotone quindi sfruttare le proprietà del sup/inf rispetto all'unione di insiemi).

- (a)  $A_n = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B_n = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  
 $C_n = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $D_n = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;  
 (b)  $F_n = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $G_n = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $H_n = \{b_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}\}$ ;  
 (c)  $I_n = \left\{(-1)^n \cdot \frac{n+2}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

6. Data la successione

$$x_n = \left(\frac{n^{10} + 6}{n! + n^2}\right)^n$$

stabilire quali fra le seguenti successioni è sottosuccessione di  $x_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+(3n)^2}\right)^{3n} \\ b_n &= \left(\frac{(n+7)^{10}+6}{(n+7)!+(n+7)^2}\right)^{n+7} \\ c_n &= \left(\frac{(n-4)^{10}+6}{\frac{(n-2)!}{(n-2)(n-3)}+(n-7)^2}\right)^{n-4} \\ d_n &= \left(\frac{(2n)^{10}+8}{(2n)!+4n^2}\right)^{2n} \\ e_n &= \left(\frac{(5n)^{10}+6}{(5n)!+30n^2}\right)^n \\ f_n &= \left(\left(\frac{(3n)^{10}+6}{(3n)!+9n^2}\right)^n\right)^3 \end{aligned}$$

7. Utilizzando il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccessioni calcolare i seguenti limiti

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n$   
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$   
 (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{4n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$   
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

8. Utilizzare il teorema del confronto o il teorema che lega l'esistenza del limite di una successione a quello del limite delle sue sottosuccessioni per stabilire quali delle successioni che seguono sono regolari

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n^2+5}{n^3+6}\right)$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{n^{(-1)^n} + n^3}{n^4+3^n}}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{n^{(-1)^n} + n^3}{n^4+5^n}}$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n}$

### Calcolo vettoriale

1. Stabilire quali dei seguenti insiemi di vettori in  $\mathbb{R}^2$  sono linearmente indipendenti

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

(b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix};$

(c)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix};$

2. Stabilire quali dei seguenti insiemi di vettori in  $\mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti

(a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

(b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix};$

(c)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

3. Provare che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formano una base di  $\mathbb{R}^3$  ed esprimere i vettori della base canonica  $e_1, e_2, e_3$  come combinazione lineare di  $v_1, v_2, v_3$ .

4. Stabilire quali dei seguenti insiemi di vettori in  $\mathbb{R}^3$  sono linearmente indipendenti

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$
- (b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix};$
- (c)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

5. Studiare l'ortogonalità dei seguenti insiemi di vettori di  $\mathbb{R}^3$ .

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$
- (b)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix};$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$

6. Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana in  $\mathbb{R}^2$  della retta passante per il punto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed avente come vettore direttore il vettore  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

7. Scrivere le equazioni parametriche, in  $\mathbb{R}^2$ , delle rette definite dalle seguenti equazioni cartesiane

$$r_1 = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 4 = 0\}.$$

$$r_2 = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 5\}.$$

8. Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta ortogonale alla retta  $r_1$  del precedente esercizio, e passante per il punto  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta ortogonale alla retta  $r_2$  definita nell'esercizio 7 e passante per il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$