

1 Successioni

Gli esercizi nei quali compare accanto al numero l'asterisco * possono risultare complicati.

1. Utilizzando la definizione di limite provare che

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2+2n} = \frac{3}{2}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3+n^2} = 0$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{5+n^2}} = 2$.

2. Utilizzando la definizione di limite stabilire quali delle seguenti successioni ammette limite:

(a) $x_n = (-1)^n$ per $n \in \mathbb{N}$

(b) $x_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$ per $n \in \mathbb{N}$

(c) $x_n = \begin{cases} n & 1 \leq n \leq 10000 \\ n^{-1} & 10000 < n \end{cases}$

(d) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1 + n^{-1} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

(e) $x_n = \begin{cases} n^{-1} & \text{per } n \text{ pari} \\ n^{-2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

(f) $x_n = \begin{cases} 1 & n = k \cdot 1000, k \in \mathbb{N} \\ n^{-2} & \text{altrimenti} \end{cases}$

3. Provare che le seguenti disuguaglianze sono verificate definitivamente

(a) $n^2 + 2n > 10n$

(b) $\sqrt{3n^2 + 100} < 2n - 10$

(c) $\sqrt{16n^2 - 100} > \pi n + 100$

4. Calcolare limiti delle seguenti successioni e stabilire se i limiti sono raggiunti per eccesso o per difetto:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-100}{n^2+2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-4)(n-6)(n-100)}{n^4}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-100}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n}$

5. Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni

$$a_n = \left(\frac{n! + 100^n + n^{1000}}{(n-1)! + 6 + 8^{-n}} \right) \cdot \frac{2}{4n}$$

$$b_n = \left(\frac{n! - 4n^4}{2^n} \right) \cdot ((n+1)!)^{-1}$$

$$c_n = \left(\frac{(n+1)! - 4n^2 - 2}{(3/2)^n - 6n^8} \right) \cdot \left(\frac{-2^n + n^{100}}{2 \cdot n! + 5n} \right)$$

$$d_n = ((n!)^{-1} - 2n^{-4} + n^{-n}) \cdot (3n^4 + 5) \cdot (n^{-2} + 5n^{-1/2} + 8)$$

$$e_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (2^{-n} + 8\sqrt{n} 8^n + 5)}{2^n 2^{2n}}$$

$$f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{n-2} + n}{4 \cdot n} - \frac{4 \cdot n^2 + n^{n-1}}{4 \cdot n^2} \right)$$

(Sugg: fare prima il minimo comune multiplo delle due espressioni, quindi, ragionare come prima)

$$g_n = \frac{n^{-4} - 5n^{-6}}{6n^{-6} + 2n^{-8}} - \frac{n^2}{6}$$

$$h_n = \left(\frac{(n+2)! - 4n^2 - 2}{n^2 2^n - 6n^8} \right) \cdot \left(\frac{-2^n + n^{100}}{2 \cdot n! + 5n} \right)$$

$$i_n = \left(\frac{2 \cdot n! - 4 \cdot 3^n}{3 \cdot n^n + 18 \cdot n^2} \right) \cdot \left(\frac{-(n+1) \cdot n^n + (n+1)!}{-2 \cdot (n+1)! + 3} \right)$$

$$l_n = \left(\frac{4^n - 3^n \cdot n^2}{3 \cdot n^{-2} + 18 \cdot (n!)^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{4^{-n} - 5 \cdot (n!)^{-1}}{5 \cdot 3^n + 26 \cdot 2^n} \right) \cdot \frac{3^n}{2 \cdot n^2}$$

$$m_n = \left(\frac{n^{n-2} + n}{4 \cdot n + \sqrt{n}} - \frac{4 \cdot n^2 + n^{n-1}}{4 \cdot n^2} \right)$$

6. Utilizzando le successioni definite nel precedente esercizio, calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni

(a) $a_n + b_n$ e $a_n \cdot b_n$

(b) $b_n \cdot c_n$ e $a_n - c_n$

7. Calcolare (leggere prima l'osservazione all'ultima pagina) il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni:

(a) $a_n = \frac{4^n n^2}{6^n}$

(b) $b_n = \frac{(n-10)!}{100^n}$

(c) $c_n = \frac{(n+100)!}{n^{(n-10)}}$

(d) $d_n = \frac{(n-4)!}{(7^n)^{300}}$

(e) $e_n = \frac{n^n}{(2n)!}$

8. Data una successione y_n , definiamo

$$x_n := (-1)^n \cdot y_n .$$

Studiare la convergenza della successione x_n nei seguenti casi:

- (a) y_n converge ad un limite finito diverso da 0;
- (b) y_n diverge;
- (c) y_n converge a 0.

9. Sfruttando il precedente esercizio dire se esistono i limiti delle seguenti successioni :

(a) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)! + 56 \cdot 5^n}{n! \cdot n}$

(b) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{15 \cdot n^2 + 5 \cdot 3^n}{6^n - n^6}$

10. Date tre successioni a_n, b_n, c_n tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

provare che se $a_n \rightarrow \ell$ e $c_n \rightarrow \ell$ allora $b_n \rightarrow \ell$.

(suggerimento: sfruttare il teorema del confronto provato a lezione.)

Osservazione. Vale il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^k}{n^n} = 0 , \quad \forall k > 0 . \quad (1.1)$$

Tale limite segue dalla seguente disuglianza

$$\frac{n! n^k}{n^n} < \frac{1}{n} , \quad \forall k > 0 . \quad (1.2)$$

che é verificata definitivamente. Mostriamolo per induzione. Osserviamo che in genere per n piccolo la disuglianza non é verificata. Tuttavia fissato k esiste sicuramente un n_0 , generalmente maggiore di k per cui é vera. Supponiamo che sia vera per $n > n_0$ e deduciamo che rimane vera anche per $n + 1$. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!(n+1)^k}{(n+1)^{n+1}} &= \frac{(n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{n!(n+1)^k}{(n+1)^n} = \frac{n!(n+1)^k}{(n+1)^n} = \\ &= \frac{n! n^k}{n^n} \cdot \frac{n^n (n+1)^k}{n^k (n+1)^n} = \frac{n! n^k}{n^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{(n-k)} < \\ &< \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{(n-k)} , \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'ipotesi induttiva. Osserviamo che $\frac{n}{n+1} < 1$, quindi per $n > k$ si ha

$$\frac{(n+1)!(n+1)^k}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n-k)} < \frac{1}{n}.$$

Quindi abbiamo mostrato per induzione la formula (1.2) vale per tutti gli n maggiori di n_0 . Da questa segue il limite (1.1). Una formula molto utile per lavorare con il fattoriale, e dalla quale si deduce facilmente il limite di sopra, è la formula di *Stirling*

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)),$$

dove e è il numero di Neper.