G_2-strutture, gruppi di Lie risolubili e spinori

Pescara

16 Giugno 2006

Anna Fino

(in collaborazione con Ilka Agricola & Simon Chiossi)

“Type II string equations ”

• Strominger (1986):
(M^n, g) varietà Riemanniana spin con una 3-forma T (‘field strength ’), un campo spinoriale Ψ (‘supersymmetry ’) e una funzione Φ (‘dilaton ’).

• Equazioni Bosoniche:

$$R^g_{ij} - \frac{1}{4} T_{imn} T_{jmn} + 2 \nabla^{LC}_i \delta_j \phi = 0, \ \delta(e^{-2\phi} T) = 0.$$

• Equazioni Fermioniche:

$$(\nabla^{LC}_X + \frac{1}{4} i_X T) \cdot \psi = 0, \quad T \cdot \Psi = 2 d\phi \cdot \Psi.$$

Non è possibile cercare le soluzioni su una varietà fissata.

Significato geometrico della 3-forma T?

La prima equazione Fermionica equivale a dire che Ψ è parallelo rispetto a una nuova connessione:

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{LC} Y + \frac{1}{2} T(X, Y, -).$$

$\Rightarrow$ T = torsione di ∇ e le equazioni diventano:

$$\mathrm{R}ic^{\nabla} + \frac{1}{2}\delta T + 2\nabla^{LC} d\phi = 0, \quad \delta(e^{-2\phi}T) = 0$$

$$\nabla \psi = 0, \quad T \cdot \Psi = 2d\phi \cdot \Psi$$

Osservazioni:

- Le equazioni Bosoniche generalizzano le equazioni di Einstein in relatività generale.
- Le varietà di Calabi-Yau e di Joyce sono soluzioni esatte con $T = 0$ e $\phi = \text{cost}$.

$\Rightarrow$ Se $n = 7$, le G_2 strutture integrabili sono soluzioni esatte e le G_2-strutture non integrabili possono essere studiate usando connessioni metriche con torsione.

• Puó la stessa varietà (M^7, g) avere G_2 strutture integrabili e non integrabili *contemporaneamente*?

• Esistono M^7 con uno spinore parallelo per ∇^{LC} che hanno uno spinore parallelo per un'altra ∇?

La risposta è *positiva* e M^7 sarà un'esten sione risolubile di rango 1 di un gruppo di Lie nilpotente di dimensione 6
($\Rightarrow$ non compatta).

Connessioni con torsione

(M^n, g) varietà Riemanniana orientata

∇: connessione metrica

$\nabla_X Y = \nabla^{LC}_X Y + A(X,Y)$,
con $A \in \mathbb{R}^n \otimes \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A$ puó essere identificata con la torsione T di ∇.

Se $A \in \Lambda^3(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\nabla_X Y = \nabla^{LC}_X Y + \tfrac{1}{2} T(X,Y,-)$$

e ∇ è detta una connessione metrica con torsione.

$\Rightarrow$ I campi vettoriali ∇-Killing coincidono con i campi vettoriali di Killing Riemanniani.

Sollevamento delle connessioni a SM

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{LC} Y + A_X Y,$$

con $A_X = i_X T \in \mathfrak{so}(n) \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$
$A_X = \sum_{i<j} \alpha_{ij} e_i \wedge e_j$.

Poichè il sollevamento a $\mathfrak{spin}(n)$ di $e_i \wedge e_j$ è $\frac{e_i \cdot e_j}{2}$, A_X definisce un elemento in $\mathfrak{spin}(n)$ ($\Rightarrow$ un endomorfismo di SM).

L'azione di A_X è:

$A_X Y = i_Y A_X$ sui vettori ($A_X \in \mathfrak{so}(n)$)

$A_X \psi = \frac{1}{2} A_X \cdot \psi$ sugli spinori ($A_X \in \mathfrak{spin}(n)$)

"$\cdot$ "è il prodotto di Clifford di una k-forma per uno spinore

$\Rightarrow$ il sollevamento di ∇ su SM è

$$\nabla_X \psi = \nabla_X^{LC} \psi + \frac{1}{2} A_X \cdot \psi.$$

Teoremi di non esistenza

Se la funzione dilaton $\phi = \text{cost}$

- Equazioni Bosoniche: $Ric^{\nabla} = 0$, $\delta T = 0$

- Equazioni Fermioniche: $\nabla \Psi = 0$, $T \cdot \Psi = 0$

Teorema Una soluzione del modello di Strominger con $\phi = \text{const}$ soddisfa necessariamente $T = 0$ o $\psi = 0$.

[Caso compatto, Agricola.

Caso generale, Agricola, Friedrich, Nagy, Puhle.]

Teorema di rigidità [Agricola-Friedrich]
(M^n, g, T) spin compatta con $Scal^g \leq 0$. Se dT agisce sugli spinori come un endomorfismo non positivo e $\exists \psi \neq 0$ soluzione di

$$\nabla_X \psi = \nabla_X^{LC} \psi + (i_X T) \cdot \psi = 0$$

allora $T = 0 = Scal^g$ e $\nabla^{LC} \psi = 0$.

Corollario Su una varietà di Calabi-Yau o di Joyce una connessione con torsione tale che $dT = 0$ può avere spinori paralleli solo per $T = 0$.

$\Rightarrow$ rigidità delle 'vacuum solutions 'per deformazioni della connessione.

Il Teorema di rigidità si applica anche a nilvarietà $\Gamma \backslash N$.

Daremo esempi in dimensione 7 per cui il teorema di rigidità non vale.

Punto di partenza Esistono metriche (non complete) con olonomia G_2 con gruppo di isometria a 2 passi nilpotente N^6 che agisce sulle orbite di codim 1 [Gibbons–Lü–Pope–Stelle].

Tali metriche sono 'scale invariant', cioè $\exists$ un campo vettoriale omotetico di Killing X ($L_X g = c\, g$) e sono equivalenti a metriche localmente conformi a metriche omogenee su estensioni risolubili di rango uno di N^6 [Chiossi, F].

$\Rightarrow$ classificazione delle algebre di Lie nilpotenti di dimensione 6 con una $SU(3)$-struttura e una derivazione "Hermitiana" D tale che la G_2-struttura sull'estensione risolubile sia conformemente parallela (integrabile).

SU(3) strutture

N^6 varietà (reale) di dimensione 6. Una $SU(3)$ riduzione è data da

$$(J,\,\omega,\,h)$$

e da una scelta di

$$\eta = \eta^+ + i\eta^- \in \Lambda^{3,0}$$

Si può scegliere una base ON di 1-forme tale che

$$\omega = e^{14} - e^{23} + e^{56},$$
$$\eta = (e^1 + ie^4) \wedge (e^2 - ie^3) \wedge (e^5 + ie^6)$$

con $\eta^\pm \wedge \omega = 0$.

<u>Osservazione</u> η^+ determina J e $\eta^- = J\eta^+$.

Torsione intrinseca per SU(3)

$$\mathrm{Hol}(N^6, h) \subseteq SU(3) \iff \begin{cases} d\omega = 0, \\ d\eta^+ = 0, \\ d\eta^- = 0. \end{cases}$$

La torsione intrinseca appartiene allo spazio

$$\begin{aligned} T^* \otimes \mathfrak{su}(3)^\perp &\cong T^* \otimes ([\![\Lambda^{2,0}]\!] \oplus \mathbb{R}) \\ &= \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5, \end{aligned}$$

dove $\mathcal{W}_j$ sono le 'classi di Gray–Hervella' per $j \leq 4$.

Se $d\omega^2 = d\eta^+ = 0 \Rightarrow$ la $SU(3)$ struttura è detta *half-flat*.

$\mathbf{G}_2$ strutture

Data M^7 tale che

$$T_m^* M^7 = T_n^* N^6 \oplus \mathbb{R}$$

(per esempio un prodotto Riemanniano $M^7 = N^6 \times \mathbb{R}$) e una $SU(3)$-struttura (ω, η^+), definiamo

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega \wedge e^7 + \eta^+, \\ *\varphi &= \eta^- \wedge e^7 + \tfrac{1}{2}\omega^2, \end{aligned}$$

dove $e^7 = dt$ (t coordinata su $\mathbb{R}$).

La metrica associata g ha una base ON per cui

$$\varphi = e^{147} - e^{237} + e^{567} + e^{125} + e^{136} + e^{246} - e^{345}$$

ha isotropia $G_2 \subseteq SO(7)$.

La torsione intrinseca di una G_2 struttura può essere identificata con $\nabla^{LC}\varphi$ ed è determinata da $d\varphi$, $d*\varphi$ mediante

$$
\begin{aligned}
d\varphi &= \tau_0 * \varphi + 3\tau_1 \wedge \varphi + *\tau_3, \\
d * \varphi &= 4\tau_1 \wedge *\varphi + \tau_2 \wedge \varphi
\end{aligned}
$$

dove τ_i è una i-forma.

$$
\begin{aligned}
\nabla\varphi \in T^* \otimes \mathfrak{g}_2^\perp &\cong \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \\
&\cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus S_0(\mathbb{R}^7) \oplus \mathbb{R}^7
\end{aligned}
$$

[Fernández-Gray]

classe	tipo	condizioni
$\mathcal{X}_4$	conformente parallela	$\tau_0 = \tau_2 = \tau_3 = 0$
$\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3$	cocalibrata	$\tau_1 = \tau_2 = 0$
$\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4$	G_2T	$\tau_2 = 0$

Teorema [Friedrich-Ivanov]
$\tau_2 = 0 \iff \exists!$ una connessione con torsione ∇ tale che $\nabla\varphi = 0$
$\iff \exists$ un campo vettoriale X tale che $\delta\varphi = -i_X\varphi$.

La risultante 3-forma di torsione è

$$T = \frac{7}{6}\tau_0\varphi - *d\varphi + *(4\tau_1 \wedge \varphi)$$

e ∇ ammette (almeno) uno spinore parallelo.

$T \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7) = \mathbb{R} \oplus S_0(\mathbb{R}^7) \oplus \mathbb{R}^7$.

(M^7, φ) è localmente conform. parallela se e solo se

$$\begin{aligned} d\varphi &= 3\tau_1 \wedge \varphi, \\ d * \varphi &= 4\tau_1 \wedge *\varphi. \end{aligned}$$

In questo caso, $T = *(\tau_1 \wedge \varphi)$.

G_2 può essere sollevato ad un sottogruppo di $Spin(7)$.

Δ_7: spazio vettoriale complesso di tutti gli spinori 7-dimensionali $\Rightarrow$ Δ_7 è una $Spin(7)$-rappresentazione complessa e la complessificazione di una rappresentazione reale.

$\Delta_7 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ (rispetto a G_2).

Useremo la rappresentazione reale ottenuta da

$e_1 = +E_{18} + E_{27} - E_{36} - E_{45}$,

$e_2 = -E_{17} + E_{28} + E_{35} - E_{46}$,

$e_3 = -E_{16} + E_{25} - E_{38} + E_{47}$,

$e_4 = -E_{15} - E_{26} - E_{37} - E_{48}$,

$e_5 = -E_{13} - E_{24} + E_{57} + E_{68}$,

$e_6 = +E_{14} - E_{23} - E_{58} + E_{67}$,

$e_7 = +E_{12} - E_{34} - E_{56} + E_{78}$,

E_{ij} base standard di $\mathfrak{so}(7)$.

Estensioni Risolubili

$(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}, \langle\cdot,\cdot\rangle')$: algebra di lie nilpotente metrica

$(\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è un'estensione risolubile metrica di $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle')$ se $[\cdot,\cdot]$ ristretto a $\mathfrak{n}$ coincide con $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{n}}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}} = \langle\cdot,\cdot\rangle'$.

Si dice che $\mathfrak{s}$ è 'standard' se $\mathfrak{a} = (\mathfrak{s}^1)^{\perp}$ è abeliano, e $\dim \mathfrak{a}$ è detta il rango.

Se il rango è 1 con $\mathfrak{a} = \langle A \rangle$, l'estensione è *di tipo di Iwasawa* se

(i) $\mathrm{ad}_A \neq 0$ è autoaggiunto rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$,

(ii) $\mathrm{ad}_A|_{\mathfrak{n}}$ è definita positiva.

Lo studio di algebre di lie risolubili standard con metriche di Einstein si riduce a quello di estensioni risolubili di rango uno

$$(\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}H, \ \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

con $\langle H, \mathfrak{n} \rangle = 0$, $||H|| = 1$ e

$$\begin{cases} [H, X] = DX, \\ [X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{n}}, \end{cases}$$

per qualche $\mathfrak{n}$ e $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ [Heber].

Tutti i gruppi di lie nilpotenti di dimensione ≤ 6 ammettono un'estensione risolubile Einstein di rango uno [Lauret, Will].

Teorema di Classificazione [Chiossi–F]

Sia N^6 un gruppo di Lie nilpotente con una $SU(3)$ struttura invariante (ω, η^+). Supponiamo che esista una derivazione D di $\mathfrak{n}$ tale che $(DJ)^2 = (JD)^2$.

Allora sull'estensione risolubile

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \langle e_7 \rangle$$

with $\mathrm{ad}_{e_7} = D$, la G_2-struttura

$$\varphi = \omega \wedge e^7 + \eta^+$$

è conformemente parallela se e solo se $\mathfrak{n}$ è
(i) o $\mathbb{R}^6$ o a 2 passi nilpotente, e
(ii) non isomorfa a $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$.

• Poichè la derivazione $D = \mathrm{ad}_{e_7}$ conserva la decomposizione ortogonale $\mathfrak{n}^1 \oplus (\mathfrak{n}^1)^\perp$, si può supporre che D sia diagonalizzabile da una base unitaria $\{e_1, \ldots, e_6\}$ con $e_1 \in (\mathfrak{n}^1)^\perp$. Le equazioni struttura di $\mathfrak{s}$ sono allora

$$\begin{cases} de^j = \hat{d}e^j + C_j e^{j7}, & 1 \leq j \leq 6 \\ de^7 = 0 \end{cases}$$

dove $\hat{d} = d|_{\Lambda^*\mathbb{R}^6}$, $\hat{d}e^1 = 0$, e $C_j \neq 0$.

• φ è conformemente parallela se e solo se $\exists m \neq 0$ such that

$$\begin{aligned} d\omega \wedge e^7 + d\eta^+ &= -3m\eta^+ \wedge e^7, \\ d\eta^- \wedge e^7 + \omega \wedge d\omega &= 2m\omega^2 \wedge e^7. \end{aligned} \qquad (*)$$

In questo caso, (ω, η^+) è necessariamente half-flat.

Conseguenze

Se $\mathfrak{n}$ non è abeliana $\Rightarrow$

- J non può essere integrabile

- $d\omega \neq 0$.

[Conti-Tomassini hanno studiato strutture half-flat simplettiche su nilvarietà $\Gamma\backslash N^6$ di dimensione 6]

$dT \neq 0$ a meno che $m = 0$.

[Chiossi–Swann hanno provato che se J è integrabile e $\Gamma\backslash N^6 \times S^1$ è G_2T, allora $\Gamma\backslash N^6$ è bilanciata.]

Corollario Ogni solvmanifold corrispondente ad ogni algebra a 2 passi nilpotente (ad eccezione di $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$) ha una coppia di metriche Einstein (una omogenea e una Ricci-piatta).

algebra di Lie nilpotente	autovalori di ad_{e_7}
$(0, 0, e^{15}, 0, 0, 0)$	$-(\frac{2m}{3}, m, \frac{4m}{3}, m, \frac{2m}{3}, m)$
$(0, 0, e^{15}, e^{25}, 0, e^{12})$	$-(\frac{3m}{5}, \frac{3m}{5}, \frac{6m}{5}, \frac{6m}{5}, \frac{3m}{5}, \frac{6m}{5})$
$(0, 0, e^{15} - e^{46}, 0, 0, 0)$	$-(\frac{3m}{4}, m, \frac{3m}{2}, \frac{3m}{4}, \frac{3m}{4}, \frac{3m}{4})$
$(0, e^{45}, -e^{15} - e^{46}, 0, 0, 0)$	$-(\frac{4m}{5}, \frac{6m}{5}, \frac{7m}{5}, \frac{3m}{5}, \frac{3m}{5}, \frac{4m}{5})$
$(0, e^{45}, e^{46}, 0, 0, 0)$	$-(m, \frac{5m}{4}, \frac{5m}{4}, \frac{m}{2}, \frac{3m}{4}, \frac{3m}{4})$
$(0, e^{16} + e^{45}, e^{15} - e^{46}, 0, 0, 0)$	$-(\frac{2m}{3}, \frac{4m}{3}, \frac{4m}{3}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{3})$

Metriche Ricci piatte corrispondenti

Se (S, φ, g) è conformemente parallela, il cambio $\tilde{g} = e^{2f} g$ con $df = me^7$ produce una metrica Ricci-piatta in termini di coordinate $(x_1, \ldots, x_6, t)$ dove $e^7 = dt$.

$\tilde{g}$ è Ricci-piatta ed ha spinori LC-paralleli.

φ definisce uno spinore LC-parallelo Ψ

$$\varphi(X, Y, Z) = \frac{1}{4} < X \cdot Y \cdot Z \cdot \Psi, \Psi >,$$

dove "$\cdot$ "è la moltiplicazione di Clifford e $<,>$ è il prodotto scalare sul fibrato spinoriale.

In termini della spin rappresentazione Δ_7 si ha $\Psi = (0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 1)$.

Confrontando le metriche con quelle trovate da GLPS

algebra di Lie nilpotente	Hol	spinori LC-paralleli
$(0,0,e^{15},e^{25},0,e^{12})$	G_2	1
$(0,e^{45},-e^{15}-e^{46},0,0,0)$	G_2	1
$(0,e^{16}+e^{45},e^{15}-e^{46},0,0,0,)$	G_2	1
$(0,0,e^{15}-e^{46},0,0,0)$	$SU(3)$	2
$(0,e^{45},e^{46},0,0,0)$	$SU(3)$	2
$(0,0,e^{15},0,0,0)$	$SU(2)$	4

Per esempio la metrica corrispondente a $(0,0,e^{15},e^{25},0,e^{12})$ è localmente isometrica alla metrica scale-invariant su $M^6 \times \mathbb{R}$, dove

$$M^6 \xrightarrow{T^3} T^3.$$

Esempio La metrica

$$\begin{aligned}\tilde g \;=\;& e^{-\frac{2}{5}mt}(dx_1^2+dx_6^2)+e^{-\frac{4}{5}mt}(dx_4^2+dx_5^2)\\ &+\tfrac{9}{25}m^2e^{\frac{4}{5}mt}(dx_3-\tfrac{2}{3}x_1dx_5+\tfrac{2}{3}x_4dx_6)^2\\ &+\tfrac{9}{25}m^2e^{\frac{2}{5}mt}(dx_2+\tfrac{2}{3}x_4dx_5)^2+e^{-2mt}dt^2\end{aligned}$$

sulla solvmanifold corrispondente a

$$(0,e^{45},-e^{15}-e^{46},0,0,0)$$

è nuova!

È scale invariant con simmetria generata dal campo omotetico di Killing

$$\begin{aligned}Z=&-\tfrac{5}{m}\tfrac{\partial}{\partial t}+4x_1\tfrac{\partial}{\partial x_1}+4x_6\tfrac{\partial}{\partial x_6}+3x_4\tfrac{\partial}{\partial x_4}+3x_5\tfrac{\partial}{\partial x_5}\\ &+\tfrac{21}{5}mx_3\tfrac{\partial}{\partial x_3}+\tfrac{18}{5}mx_2\tfrac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Evoluzione delle SU(3)-strutture

Se la G_2-struttura

$$\varphi = \omega \wedge e^7 + \eta^+$$

su $\mathfrak{s}$ è conformente parallela, (ω, η^+) è half-flat.

<u>Teorema</u> [Hitchin]
Se una varietà compatta N^6 ha una $SU(3)$-struttura half-flat, $\exists$ una metrica con Hol$\subseteq G_2$ su $N^6 \times I$ per qualche intervallo I.

<u>Proposizione</u> [Chiossi-F]
Ognuna delle metriche Ricci-piatte $\tilde{g}$ sul gruppo di Lie risolubile S può essere ottenuta evolvendo la $SU(3)$ struttura sulla nilvarietà $\Gamma \backslash N^6$.

Problemi in relazione agli spinori:

• $\tilde{g}$ è indotta da un'altra G_2-struttura (non integrabile)?

• Quali gruppi di Lie risolubili $(S, \tilde{g})$ hanno uno spinore parallelo per un'altra connessione con torsione?

Supporemo che T sia della forma

$$T \in \Lambda^3_{11} =< \text{forme semplici in}\, \eta^+, \eta^-, \omega \wedge e^7 > .$$

La moltiplicazione di Clifford per $i_{e_i}T$ ha, come endomorfismo, la struttura a blocchi

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$

La connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}^{LC}$ è data da:

$$\tilde{\nabla}^{LC}_X Y = \nabla^{LC}_X Y + df(X)Y + df(Y)X - g(X,Y)\text{grad} f,$$

con $df = me^7 \Rightarrow \tilde{\nabla}^{LC}_{e_7} X = 0, \forall X \in \mathfrak{n} \Rightarrow$
$\text{Ker}(\tilde{\nabla}^{LC}_{e_7} + i_{e_7}T) = \text{Ker}(i_{e_7}T)$.

Spinori paralleli

Teorema di riduzione [Agricola, Chiossi, F]
Un elemento non-banale nel nucleo di $i_{e_7}T$ per $T \neq 0 \in \Lambda^3_{11}$ è una combinazione lineare di blocchi superiori:

- $\Psi = (a, b, c, d, 0, 0, 0, 0)$ con

$T_{567} = 0$, $T_{147} = -T_{237}$;

- $\Psi = (a, b, \mp a, \pm b, 0, 0, 0, 0)$ e

$T_{147} = -T_{237} + \epsilon T_{567}$

o blocchi inferiori:

- $\Psi = (0, 0, 0, 0, e, f, g, h)$ con

$T_{567} = 0$, $T_{147} = T_{237}$.

- $\Psi = (0, 0, 0, 0, e, f, \pm e, \mp f)$ e

$T_{147} = T_{237} + \epsilon T_{567}$.

$(S, \tilde{g})$: solvmanifold corrispondente a

$$(0, 0, e^{15}, e^{25}, 0, e^{12}).$$

$\Psi = (0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, 1)$: unico spinore LC-parallelo

<u>Teorema</u> [Agricola, Chiossi, F]
L' equazione $\nabla_X \Psi = 0$ ha 7 soluzioni per qualche $T \neq 0 \in \Lambda^3_{11}$, cioè:
a) una famiglia $\mathbb{RP}^1$-parametro di coppie $(T_{r,s}, \Psi_{r,s})$ tale che $\nabla^{r,s}\Psi_{r,s} = 0$;
per $r = s$, si ha $T_{r,s} = 0$ e $\Psi_{r,s}$ è un multiplo di Ψ.
b) 6 soluzioni isolate in coppie $(T_i^{\epsilon}, \Psi_i^{\epsilon})$ per $i = 1, 2, 3$ e $\epsilon = \pm$.
Ogni G_2 struttura ammette un solo spinore parallelo, è di tipo generale G_2T
$\mathbb{R} \oplus S_0(\mathbb{R}^7) \oplus \mathbb{R}^7$, ad eccezione del caso $r = s$ ($\varphi_{r,r}$ è parallela) e $r = -s$ (non c'e' la $\mathbb{R}$-componente).

$(S,\tilde g)$: solvmanifold corrispondente a
$$(0, e^{45}, -e^{15}-e^{46}, 0, 0, 0).$$

<u>Teorema</u> [Agricola, Chiossi, F]
If $\exists\ \psi \neq 0$ soluzione di $\nabla\psi = 0$, allora:
(a) ψ è un multiplo di
$(1+2i\epsilon\sqrt{2},\ 3,\ 1+2i\epsilon\sqrt{2},\ -3, 0, 0, 0, 0)$ e
$T = \frac{2}{3}[-2e^{126}+e^{135}-4e^{245}+e^{346}]+i\epsilon\sqrt{2}\,[e^{125}+e^{136}+e^{246}+e^{345}]+\frac{2}{3}i\epsilon\sqrt{2}\,[-e^{147}-e^{567}+2e^{237}]$ or
(b) ψ è un multiplo di
$(3,\ -1+2i\epsilon\sqrt{2},\ -3,\ -1+2i\epsilon\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0)$ e
$T = \frac{2}{3}[e_{126}-e_{135}+4e_{245}-2e_{346}]+i\epsilon\sqrt{2}\,[-e_{125}+e_{136}+e_{246}-e_{345}]+\frac{2}{3}\,i\epsilon\sqrt{2}\,[-e_{147}+e_{567}+2e_{237}]$ o
(c) ψ è un multiplo di
$(0, 0, 0, 0,\ 1+2i\epsilon\sqrt{2},\ 3,\ 1+2i\epsilon\sqrt{2},\ -3)$ e
$T = \frac{2}{3}[e_{126}-2e_{135}+4e_{245}-e_{346}]+i\epsilon\sqrt{2}\,[e_{125}+e_{136}-e_{246}-e_{345}]+\frac{2}{3}\,i\epsilon\sqrt{2}\,[e_{147}-e_{567}+2e_{237}]$.

<u>Question</u> C'è un'interpretazione fisica delle soluzioni complesse?