Calcolo proposizionale

1 Il calcolo delle proposizioni

DEFINIZIONE Una proposizione logica si dice semplice o atomica se contiene soltanto un predicato.

Due o più proposizioni semplici collegate mediante l'uso di connettivi formano proposizioni logiche più complesse dette proposizioni composte o molecolari. Nel calcolo delle proposizioni sono date le regole per stabilire la qualità da attribuire ad una proposizione composta, tenendo conto delle qualità delle proposizioni semplici che la compongono e del significato dei vari connettivi logici in essa presenti.

Generalmente, le proposizioni logiche (o enunciati) semplici sono rappresentate mediante le lettere dell'alfabeto:

$$a, b, c, \ldots, p, q, \ldots$$

A partire dalle proposizioni semplici, mediante i connettivi logici, si possono ottenere altre proposizioni, dette proposizioni composte o molecolari. Ad esempio, con gli enunciati semplici a e b si possono formare gli enunciati composti:

$$a \vee b, \qquad a \wedge b, \qquad a \rightarrow b, \qquad a \leftrightarrow b, \qquad \ldots$$

Eseguendo successivamente operazioni elementari su enunciati, si ottengono altri più complessi. Per comprendere meglio l'importanza dell'argomento che si vuole approfondire in questo capitolo, vengono richiamate prima alcune nozioni di aritmetica. Come è noto al lettore, eseguendo in successione le operazioni elementari dell'aritmetica con uno o più numeri naturali, si ottengono le cosiddette espressioni aritmetiche. Per specificare la priorità delle operazioni da eseguire, si fa uso di parentesi. Date, ad esempio, le espressioni:

$$(2 + 3) \cdot 6 \qquad 3 + (2 \cdot 4),$$

si eseguono prima le operazioni in parentesi e successivamente le altre.

Si ha, così:

$$(2 + 3) \cdot 6 = 5 \cdot 6 = 30$$

$$3 + (2 \cdot 4) = 3 + 8 = 11.$$

Per non fare un uso smodato di parentesi, si conviene di stabilire delle priorità fra le operazioni. Si ammette che le operazioni di moltiplicazione e divisione siano prioritarie rispetto all'addizione e alla sottrazione. Quindi, le due scritture:

$$3 + (2 \cdot 4)$$

e

$$3 + 2 \cdot 4$$

sono equivalenti. A chiarimento di quanto detto, si propone la semplificazione della seguente espressione:

$$(3 + 4) \cdot 7 + 20 \div 5 - 2.$$

Si ha:

$$(3 + 4) \cdot 7 + 20 \div 5 - 2 = 7 \cdot 7 + 4 - 2 = 49 + 4 - 2 = 51.$$

Analogamente, in **logica matematica**, eseguendo in successione delle operazioni elementari su proposizioni (o enunciati), si ottengono delle espressioni proposizionali o proposizioni composte.

Per stabilire il valore di verità di una proposizione composta, a partire dai valori di verità delle proposizioni semplici o atomiche, si procede tenendo presente le seguenti convenzioni:

1) Il segno di negazione si riferisce alla sola proposizione su cui è posto.
2) I segni $\vee$ e $\wedge$ sono prioritari rispetto ai segni $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

ESEMPI

1. Costruire la tabella di verità relativa alla seguente proposizione logica: $p \vee \overline{q}$.

Le proposizioni semplici (o di partenza) sono la p e la q. Eseguita l'operazione di negazione della proposizione q, si forma la proposizione composta mediante la disgiunzione tra la proposizione p e la negazione di q. Presi in considerazione tutti i casi possibili riguardanti le proposizioni di partenza p e q, si può formare la colonna riguardante la negazione di q. Successivamente, completata la terza colonna, si può formare la quarta, tenendo conto della prima e della terza e del connettivo "$\vee$ ". Si ha, così, la seguente tabella:

p	q	$\overline{q}$	$p \vee \overline{q}$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Osservando l'ultima colonna a destra, si nota che una proposizione avente la struttura $p \vee \overline{q}$ ha qualità FALSO soltanto nel caso in cui le proposizioni p e q abbiano rispettivamente qualità FALSO e qualità VERO; in tutti gli altri casi tale proposizione ha qualità VERO.

Vengono riportati ora alcuni esempi di proposizioni che rientrano nella struttura considerata.

- " Il Po è un fiume **o** Roma **non** è la capitale d'Italia"

Le proposizioni semplici che la compongono sono:

" Il Po è un fiume " ,
" Roma è la capitale d'Italia".

Essendo entrambe vere, allora la proposizione data risulta vera (Osservare la prima riga della tabella).

- " L'Italia è una nazione **o** il Tevere **non** è un lago"

La proposizione ha qualità VERO. (Osservare la seconda riga della tabella).

- " Il Tevere è una città **o** Milano **non** una città"

La proposizione ha qualità FALSO (osservare la terza riga della tabella).

- " La Lombardia è una nazione **o** Como **non è** un lago".

La proposizione ha qualità VERO (osservare la quarta riga della tabella).

2. Costruire la tabella di verità relativa alla seguente proposizione logica: $\overline{p} \wedge q$

Si ha:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

La forma proposizionale data rappresenta una proposizione con qualità VERO soltanto se p ha qualità FALSO e q ha qualità VERO.

3. Costruire la tabella di verità relativa alla seguente proposizione logica: $\overline{p} \vee \overline{q}$.

Si ha:

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$.
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

La forma proposizionale data rappresenta una proposizione con qualità FALSO soltant0 o se p e q hanno qualità VERO.

4. Costruire la tabella di verità relativa alla seguente proposizione logica: $p \rightarrow \overline{q}$.

Si ha:

p	q	$\overline{q}$	$p \rightarrow \overline{q}$.
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

La forma proposizionale data rappresenta una proposizione con qualità VERO soltanto se p ha qualità FALSO e q ha qualità VERO.

5. Costruire la tabella di verità relativa alla seguente proposizione logica: $p \rightarrow (\overline{q} \wedge r)$.

p	q	r	$\overline{q}$	$\overline{q} \wedge r$	A
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Le proposizioni semplici sono tre: p, q ed r. Allora i casi possibili sono otto, come si vede dalla tabella accanto.

2 Espressioni equivalenti

Siano date le due espressioni proposizionali $\overline{p \wedge q}$ e $\overline{p} \vee \overline{q}$. Poiché entrambe risultano costituite dalle stesse proposizioni semplici p e q, si può costruire la seguente tabella di verità:

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Osservando la quarta e la settima colonna, si nota che le due espressioni date risultano identiche. Si dice, allora che esse sono equivalenti e si scrive:

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}.$$

DEFINIZIONE

Due espressioni proposizionali costituite dalle stesse proposizioni semplici si dicono equivalenti se il valore di verità assunto dalla prima è sempre uguale a quello assunto dalla seconda per tutti i valori di verità che possono assumere le proposizioni semplici che le compongono.

ESEMPI

1. Dimostrare che $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Posto:

$$A = p \leftrightarrow q$$

e

$$B = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

si costruisce la seguente tabella di verità:

p	q	A	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	B
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Dal confronto della terza colonna con la sesta consegue che le due espressioni proposizionali A e B sono equivalenti.

2. Dimostrare che $p \rightarrow q = \overline{p} \vee q$.

Si costruisce la tabella di verità:

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Poiché la terza e la quinta colonna sono identiche, si può affermare che le due espressioni $p \rightarrow q$ e $\overline{p} \vee q$ sono equivalenti.

3 Tautologie e contraddizioni

Si prendano in considerazione le tabelle di verità relative alle due espressioni proposizionali:

$$p \vee \overline{p} \quad \text{e} \quad p \wedge \overline{p}$$

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	V
F	V	V

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
V	F	F
F	V	F

Come si vede, un’espressione proposizionale strutturata come la prima ha sempre qualità VERO, indipendentemente dalla qualità della proposizione con cui si opera. Si dice che essa rappresenta una TAUTOLOGIA.

DEFINIZIONE

Una tautologia è un'espressione proposizionale con qualità sempre VERO soltanto in virtù della sua particolare struttura.

ESEMPI

1. " Milano è una città **o** Milano **non** è una città".

2. " L'Italia è un continente **o** l'Italia **non** è un continente".

3. “ 5 è maggiore di 2 **o** 5 **non** è maggiore di 2 “

Un’espressione proposizionale come la seconda, invece, ha sempre qualità FALSO, indipendentemente dalla qualità della proposizione con cui si opera. Si dice che essa rappresenta una CONTRADDIZIONE.

DEFINIZIONE

Una contraddizione è un’espressione proposizionale con qualità sempre FALSO soltanto in virtù della sua particolare struttura**.**

ESEMPI

1. " Milano è una città **e** Milano **non** è una città".

2. " L'Italia è un continente **e** l'Italia **non** è un continente".

3. “ 5 è maggiore di 2 **e** 5 **non** è maggiore di 2 “

Si dimostra facilmente che l’espressione:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow ((p \rightarrow r)$$

è una tautologia. Infatti, si ha:

p	q	r	A $p \rightarrow q$	B $q \rightarrow r$	C $A \wedge B$	D $p \rightarrow r$	$C \rightarrow D$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Si dice che il condizionale gode della proprietà transitiva.

4 Proprietà delle operazioni logiche

$p \vee p = p; \quad p \wedge p = p$	**Proprietà di idempotenza**
$p \vee q = q \vee p;$ $p \wedge q = q \wedge p;$	**Proprietà commutativa**
$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	**Proprietà associativa**
$p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$	**Leggi di assorbimento**
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	**Proprietà distributiva**
$\overline{\overline{p}} = p$	**Legge della doppia negazione**
$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$	**Leggi di De Morgan**
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	**Transitività del condizionale**

Le dimostrazioni di queste proprietà si possono effettuare mediante la costruzione delle tabelle di verità.