Introduzione alla logica matematica

1 PROPOSIZIONE LOGICA

Ogni discorso è fatto mediante espressioni di vario tipo che sono dette: **proposizioni.**
Nel linguaggio ordinario, si chiama proposizione qualunque discorso avente senso compiuto.

ESEMPI

1)	Alessandro Manzoni è l'autore del romanzo " I Promessi Sposi ";
2)	Il Piemonte è una regione italiana;
3)	Il numero 4 è la metà del numero 8;
4)	Parigi è la capitale della Spagna;
5)	Il fiume Po bagna Firenze;
6)	Il triangolo è un poligono avente quattro lati;
7)	Roma è una bella città;
8)	Gli Stati Uniti d'America sono un grande paese.

Con certezza, le prime tre frasi possono essere classificate (o etichettate) come **vere** e le successive tre come **false**. Invece, le ultime due, esprimendo valutazioni personali (o soggettive), possono rientrare sia nella categoria delle frasi vere sia di quelle false.
In logica matematica, scienza del ragionamento, sono prese in considerazione esclusivamente frasi del primo tipo, che perciò sono dette **proposizioni logiche** o **enunciati**.

DEFINIZIONE	Si dice proposizione logica qualsiasi espressione linguistica o verbale o simbolica per la quale esista un criterio mediante il quale sia possibile associare una ed una soltanto delle due qualità: VERO o FALSO.

La qualità VERO o FALSO che può essere associata ad una proposizione è detta **valore di verità** della proposizione.
In Logica matematica sono presentati i criteri per stabilire il valore di verità di una proposizione. La Logica che è presentata in questo capitolo è detta **logica bivalente,** o **logica a due valori,** perché ogni proposizione può essere o vera o falsa.
Le proposizioni logiche, in altre parole, devono obbedire a due principi fondamentali: il **principio di non contraddizione** e il **principio del terzo escluso.**

PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE	Una proposizione logica non può avere contemporaneamente qualità VERO e qualità FALSO.

PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO	Una proposizione logica non può non avere né qualità VERO né qualità FALSO

Il primo principio afferma che non può accadere che una proposizione logica sia contemporaneamente VERA e FALSA; il secondo pone come condizione che non può accadere che una proposizione logica sia né VERA né FALSA.

ESEMPI	Stabilire quali delle seguenti frasi rappresenta proposizioni logiche e quali no.
1)	" Roma è la capitale d'Italia ";
2)	" L'Italia è un continente";
3)	" La neve è bianca";
4)	“ Parigi è una città splendida”;
5)	" La matematica è una materia importante";
6)	" 7 è minore di 2";
7)	" 6 è il doppio di 3";
8)	“ Dante visse prima di Leopardi”;
9)	" 6 è compreso fra 3 e 8";
10)	" 3 + 6 = 5";
11)	" 5 è un numero dispari ?"
12)	" com’è bello sognare!"

Sono proposizioni in senso logico la 1), la 2), la 3), la 6), la 7), la 8), la 9) e la 10). Esse hanno qualità rispettivamente VERO, FALSO, VERO, FALSO, VERO, VERO, VERO, FALSO. Per tutti questi esempi sono rispettati i due principi di contraddizione e del terzo escluso.

La 4) e la 5) non rappresentano proposizioni in senso logico perché sulla qualità da attribuire a ciascuna di esse due persone possono essere in disaccordo. Per loro non è rispettato il principio di non contraddizione. Insomma, mentre per il primo gruppo di frasi tutti sono d'accordo circa la qualità da associare a ciascuna di loro, per quelle del secondo, invece, i giudizi possono essere diversi.

La 11) e la 12) non rappresentano proposizioni in senso logico perché per loro non ha senso chiedersi se sono vere o false. Per queste frasi non è rispettato il principio del terzo escluso.

I primi tre esempi esprimono che un certo individuo, detto anche soggetto, ha una certa proprietà, detta anche predicato. Poiché in tali esempi sia il soggetto sia il predicato sono ben individuati, ha senso chiedersi se ciascuna di tali espressioni sia vera o falsa. Nel primo esempio il soggetto è Roma e il predicato è quello d’essere la capitale d'Italia. Nel secondo il soggetto è l'Italia e il predicato è quello di essere un continente. Nel terzo esempio il soggetto è la neve e il predicato è l'essere bianca.
In questi casi il predicato è detto monadico perché si riferisce ad un solo soggetto.

In ciascuno degli esempi 4) e 5) è bene individuato il soggetto, ma non altrettanto si può dire per quanto riguarda i rispettivi predicati. Difatti i predicati “ essere una città splendida” ed “essere una materia importante” esprimono giudizi puramente soggettivi. Ecco perché tali esempi non rappresentano proposizioni in senso logico.

Gli esempi 6), 7) e 8) esprimono che tra due individui o soggetti sussiste una certa relazione. Nel sesto esempio tra i numeri 7 e 2 sussiste la relazione (o il predicato) " minore di..."; nel settimo esempio tra il 6 e il 3 sussiste la relazione " è il doppio di ..."; nell'ottavo esempio tra Dante e Leopardi sussiste la relazione di precedenza nel tempo. Poiché ciascuna delle relazioni considerate si riferisce a due soggetti, si dice che esse esprimono un predicato diadico. (In questo contesto, la parola "soggetto" è da intendersi come individuo e non col significato che essa ha nella sintassi del periodo).
Gli esempi 9) e 10) esprimono il fatto che fra tre individui o soggetti sussiste una certa relazione, la quale è detta predicato triadico.

2 FORME PROPOSIZIONALI

Come si è visto negli esempi considerati, in ogni proposizione in senso logico il soggetto, o i soggetti, sono sempre ben determinati. Per esprimere questa circostanza si dice che nelle proposizioni logiche il soggetto è costante. La stessa cosa può essere ripetuta per i predicati. Spesso, però, sono considerate frasi come:

1)	" x è un numero pari ";
2)	" 4 è maggiore di x ";
3)	" z è compreso fra x e y".

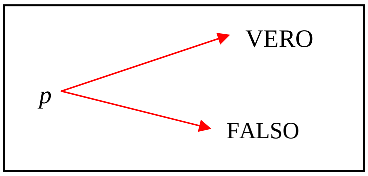
Nel primo esempio, la lettera x rappresenta un soggetto generico, non precisabile; e poiché tale soggetto è suscettibile di assumere nomi diversi, si dice che esso è variabile. Nel secondo esempio, la x rappresenta un predicato variabile. Nel terzo esempio sia i soggetti sia il predicato sono variabili. Frasi di questo genere non rappresentano proposizioni in senso logico perché per loro non ha senso chiedersi se hanno qualità VERO o FALSO. Tali frasi, però, divengono proposizioni in senso logico appena le variabili siano sostituite con nomi ben precisati. Poiché ad una variabile possono essere sostituiti infiniti nomi, si dice che ogni frase del tipo considerato è rappresentativa di infinite proposizioni in senso logico.

Espressioni linguistiche di questo tipo sono dette **forme proposizionali.**

Le proposizioni matematiche sono tutte logiche, ossia sono caratterizzate dalla univocità della qualità da associare a ciascuna di loro.

In logica matematica le proposizioni sono indicate con le lettere dell'alfabeto, ragion per cui si parla anche di logica simbolica.

Se con la lettera " p" è indicata una proposizione, si ha:



Con il simbolo " p " si vuole indicare una generica proposizione logica alla quale, per quanto detto prima, deve essere associata una ed una soltanto delle due qualità VERO e FALSO. Per semplicità, le due qualità VERO e FALSO sono indicati rispettivamente con il simbolo **V** e **F**. Spesso, però, si usa indicare col simbolo 1 la qualità VERO e col segno 0 la qualità FALSO.

3 OPERAZIONI ELEMENTARI CON LE PRIOPOSIZIONI

Con le proposizioni, al pari dei numeri, è possibile eseguire delle operazioni che consistono nel trasformare una proposizione o nel collegare tra loro due o più proposizioni o enunciati mediante l'uso di operatori espressi dalle seguenti locuzioni:

non, **o**, **e**, **se … allora**, **se e solo se**.

denominate **connettivi.**

Per chiarire meglio le cose, si considerino i seguenti esempi:

1)	L'Italia **non** è una nazione;
2)	Maria è bionda **o** ha gli occhi neri;
3)	Maria è bionda **e** ha gli occhi neri;
4)	**Se** il numero n è pari **allora** è divisibile per 2;

5)	Il numero n è divisibile per 6 **se e solo se** è divisibile per 2 e per 3

La locuzione **non**, detta operatore di negazione, fa corrispondere a una proposizione la sua negazione. A ciascuno dei rimanenti quattro connettivi, invece, corrisponde un'operazione elementare mediante la quale a due proposizioni è associata una nuova proposizione.

L'operatore " **non** " si chiama connettivo **unario** perché è applicato a una sola proposizione, mentre gli altri connettivi sono detti **binari** perché operano su due proposizioni.
Le operazioni elementari che si eseguono con le proposizioni logiche sono:

I)	la NEGAZIONE,
II)	la DISGIUNZIONE o somma logica;
III)	la CONGIUNZIONE o **prodotto logico;**
IV)	il CONDIZIONALE**;**
V)	il BICONDIZIONALE**.**

I segni operativi delle operazioni con le proposizioni sono chiamati: **connettivi logici.**

4 NEGAZIONE

Siano date le proposizioni:

1) " Il Piemonte è una regione italiana ";

2) " Il Piemonte **non** è una regione italiana ".

La prima ha qualità VERO, la seconda ha qualità FALSO.

Come si vede, la seconda proposizione differisce dalla prima soltanto per il termine " **non** ". L'inserimento di tale termine nella prima proposizione ha prodotto l'effetto di alterarne la qualità, producendo così una seconda proposizione. Cioè, il termine " **non** " ha trasformato la 1) nella 2). Si può dire allora che così facendo sia stata eseguita un'operazione mediante l'operatore " **non** ". A tale operazione si dà il nome di NEGAZIONE

Se la prima proposizione è indicata col simbolo " p ", la seconda che è stata ottenuta mediante l'operatore " **non** " è rappresentata simbolicamente col segno " $\overline{p}$ " e si legge " non p ".

DEFINIZIONE	La NEGAZIONE di una proposizione logica è una proposizione con qualità VERO se la proposizione di partenza ha qualità FALSO e con qualità FALSO se, invece, la proposizione di partenza ha qualità VERO.

Per esprimere più chiaramente quanto detto, è costruita la seguente tabella di sinistra, detta **tabella o tavola di verità**.

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

P	$\overline{p}$
1	0
0	1

Nella colonna di sinistra sono riportate tutte le possibili qualità della proposizione " p " con cui si opera (proposizione di partenza). I casi sono due: p può avere qualità V (vero) o qualità F (falso). Nella colonna di destra si riportano i risultati dell'operazione. Come si vede: se p ha qualità VERO, $\overline{p}$ ha qualità FALSO;

se p ha qualità FALSO, $\overline{p}$ ha qualità VERO. Sostituendo a V e F rispettivamente i simboli 1 e 0, si ha la tabella di destra.

ESEMPI

1.	p	" Roma è la capitale d'Italia "	V
	$\overline{p}$	" Roma **non** è la capitale d'Italia "	F
2.	q	" L'Italia è un continente "	F
	$\overline{q}$	" L'Italia **non** è un continente "	V
3.	p	" Il quadrato è un poligono di tre lati"	F
	$\overline{p}$	" Il quadrato **non** è un poligono di tre lati"	V
4.	p	" Il fiume Po bagna Torino"	V
	$\overline{p}$	" Il fiume Po **non** bagna Torino"	F

Poiché la NEGAZIONE di una proposizione è ancora una proposizione si può dire che:

la NEGAZIONE è una legge unaria di composizione interna ovunque definita nell'insieme delle proposizioni.

Si osserva facilmente che sussiste una stretta analogia tra l'operazione della negazione definita nell'insieme delle proposizioni e l'operazione di complementazione definita in un insieme di insiemi.

5 La DISGIUNZIONE o SOMMA LOGICA

Sia data la proposizione:

" L'Italia è una nazione **o** il Po è un fiume ".

Si tratta di una proposizione formata dalle due proposizioni semplici:

" L'Italia è una nazione"

e " Il Po è un fiume ",

mediante la congiunzione disgiuntiva " **o** ".

In logica matematica (o logica simbolica), la congiunzione disgiuntiva " **o** " è espressa mediante il simbolo (o segno) " $\vee$ ", che è chiamato **connettivo logico**.

Indicando con p la prima proposizione componente e con q la seconda, la proposizione composta data può essere rappresentata mediante l'espressione simbolica:

$p \vee q$, che si legge: " p **o** q ".

DEFINIZIONE

La DISGIUNZIONE o SOMMA LOGICA di due proposizioni logiche è una proposizione con qualità VERO se almeno una delle proposizioni componenti ha qualità VERO.

Come per l'operazione precedente, è formata la tabella di verità che in questo caso risulta costituita di tre colonne. Le prime due colonne, a partire da sinistra, riguardano le due proposizioni semplici con cui si opera, la terza riporta i risultati dell'operazione.

Indicando con p e q due generiche proposizioni logiche, si possono presentare i seguenti quattro casi:

1) entrambe le proposizioni sono vere;
2) la prima proposizione è vera e la seconda è falsa;
3) la prima proposizione è falsa e la seconda è vera;
4) entrambe le proposizioni sono false.

Ciò risulta molto chiaramente, leggendo le ultime quattro righe di ciascuna delle due tabelle di verità riportate qui di seguito.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tenendo conto della regola enunciata prima, si comprende bene il significato della terza colonna di ciascuna delle due tabelle. Si nota che la disgiunzione di due proposizioni logiche ha qualità FALSO soltanto nei casi in cui entrambe le proposizioni hanno qualità FALSO. Si può dire allora che una frase avente la struttura del tipo: $p \vee q$ ha qualità FALSO soltanto se le due proposizioni componenti hanno qualità FALSO; in tutti gli altri casi in cui entrambe le proposizioni hanno qualità FALSO. Si può dire allora che una frase avente la struttura del tipo: $p \vee q$ ha qualità FALSO soltanto se le due proposizioni componenti hanno qualità FALSO; in tutti gli altri casi, essa ha qualità VERO.

ESEMPI

1.

p	" L'Italia è una nazione "	V
q	" Il Po è un fiume "	V
$p \vee q$	" L'Italia è una nazione **o** il Po è un fiume "	V

2.

p	L'Europa è un continente"	V
q	" Il numero 2 è maggiore del numero 7 "	F
$p \vee q$	" L'Asia è un continente **o** il numero 2 è maggiore del numero 7 "	V

3.

p	" La neve è nera "	F
q	" L'Italia è una nazione "	V
$p \vee q$	" La neve è nera **o** l'Italia è una nazione "	V

4.

p	" Il Po è un mare "	F
q	" L'Italia è un continente "	F
$p \vee q$	" Il Po è un mare **o** l'Italia è un continente "	F

Il connettivo " **o** " viene spesso sostituito dal termine inglese " **or** " e dà luogo all'unione di due proposizioni L'operazione di disgiunzione logica è analoga all'operazione di unione fra insiemi.

PROPRIETA' DELLA DISGIUNZIONE LOGICA

La DISGIUNZIONE LOGICA gode delle proprietà:

I)	**di idempotenza;**	$p \vee p = p$
II)	**commutativa;**	$p \vee q = q \vee p$
III)	**associativa.**	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

Tali proprietà si dimostrano facilmente procedendo come nel caso delle operazioni con gli insiemi, ossia costruendo le tabelle di verità.

6 La CONGIUNZIONE o PRODOTTO LOGICO

Se due proposizioni semplici sono legate mediante la congiunzione " **e** ", si ottiene una proposizione composta che è denominata " **CONGIUNZIONE** ".

In logica simbolica, il connettivo " **e** " è espresso mediante il simbolo " $\wedge$ ".

DEFINIZIONE

La CONGIUNZIONE o PRODOTTO LOGICO di due proposizioni è una proposizione con qualità VERO soltanto se entrambe le proposizioni componenti hanno qualità VERO.

Se con p e q sono indicate due generiche proposizioni, la loro congiunzione è espressa nel modo seguente:

$$p \wedge q,$$

che si legge:

"*p* **e** *q*".

Si hanno le seguenti tabelle di verità:

p	q	$p \wedge q$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ESEMPI

1.

p	" Roma è la capitale d'Italia"	*V*
q	" La neve è bianca "	*V*
$p \wedge q$	" Roma è la capitale d'Italia **e** la neve è bianca "	*V*

2.

p	" Il triangolo è un poligono"	*V*
q	" La neve è nera "	*F*
$p \wedge q$	" Il triangolo è un poligono **e** la neve è nera "	*F*

3.

p	" L'Italia non è una nazione "	*F*

	q	" Il numero 6 è maggiore del numero 3"	V
	$p \wedge q$	" L'Italia non è una nazione **e** il numero 6 è maggiore di 3 "	F
4.	p	" Parigi è una nazione "	F
	q	" La neve è nera "	F
	$p \wedge q$	" Parigi è una nazione **e** la neve è nera "	F

Il connettivo " **e** " è spesso sostituito dal termine inglese " **and** " .

L'operazione di congiunzione logica è analoga a quella di intersezione di due insiemi.

PROPRIETA' DELLA CONGIUNZIONE LOGICA

La CONGIUNZIONE LOGICA gode delle proprietà:

I)	**di idempotenza;**	$p \wedge p = p$
II)	**commutativa;**	$p \wedge q = q \wedge p$
III)	**associativa.**	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

7 IL CONDIZIONALE

DEFINIZIONE Il condizionale di due proposizioni è una proposizione con qualità FALSO soltanto nel caso in cui la prima proposizione ha qualità VERO e la seconda qualità FALSO.

La proposizione condizionale costituita dalle due proposizioni p e q si indica con:

$p \rightarrow q$, e si legge: " **se** p **allora** q ".

Si hanno le seguenti tabelle di verità:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La prima proposizione del condizionale è detta **antecedente** e la seconda **conseguente**.

Il connettivo logico " **se … allora** ", rappresentato dalla freccetta, fa pensare subito a un nesso o dipendenza logica fra le due proposizioni p e q che formano la proposizione condizionale $p \rightarrow q$. Dal punto di vista strettamente sintattico invece tale dipendenza non è richiesta perché si prende in considerazione soltanto la struttura della proposizione più che il suo significato. Ciò che si richiede invece è che la qualità del condizionale possa essere dedotta da quelle delle proposizioni componenti.

Per comprendere meglio il significato del condizionale, basta provare l'equivalenza delle due proposizioni $p \rightarrow q$ e $\overline{p} \vee q$.

La dimostrazione può essere eseguita mediante la costruzione di una tabella di verità.

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Poiché la terza e la quinta colonna sono identiche, si può affermare che le due espressioni $p \rightarrow q$ e $\overline{p} \vee q$ sono equivalenti.
Si può dire allora che il **condizionale** è la disgiunzione della negazione dell'antecedente col conseguente.
Tenuto conto del fatto che una disgiunzione ha qualità VERO se almeno una delle due proposizioni componenti abbia qualità VERO, si può dire che:

se il conseguente q ha qualità VERO (primo e terzo caso), la disgiunzione $\overline{p} \vee q$ ha qualità VERO, indipendentemente dalla qualità di p; se l'antecedente p ha qualità FALSO (secondo e quarto caso), allora $\overline{p}$ ha qualità VERO e perciò la disgiunzione $\overline{p} \vee q$ avrà qualità VERO.

ESEMPI

1.

p	" La neve è bianca"	V
q	" Il Po è un fiume "	V
$p \rightarrow q$	" **Se** la neve è bianca **allora** il Po è un fiume "	V

2.

p	" Milano è una città"	V
q	" La neve è nera "	F
$p \rightarrow q$	" **Se** Milano è una città **allora** la neve è nera "	F

3.

p	" L'Asia è una nazione "	F
q	" $8 > 3$"	V
$p \rightarrow q$	" **Se** l'Asia è una nazione **allora** $8 > 3$ "	V

4.

p	" La Svizzera è bagnata dal mare "	F
q	" La sigaretta è un frutto "	F
$p \rightarrow q$	" **Se** la Svizzera è bagnata dal mare **allora** la sigaretta è un frutto "	$\boxed{V}$

Per quanto detto sopra, le frasi possono essere espresse anche nel seguente modo:

1)	" La neve **non** è bianca (F) **o** il Po è un fiume (V) "	V
2)	" Milano **non** è una città (F) **o** il numero 2 è maggiore del numero 7 (F) "	F

3)	" L'Asia **non** è una nazione (V) **o** $8 > 3$ (V) "	V
4)	" La Svizzera **non** è bagnata dal mare (V) **o** la sigaretta è un frutto (F) "	V

8 IL BICONDIZIONALE

DEFINIZIONE Il bicondizionale di due proposizioni è una proposizione con qualità VERO se entrambe le proposizioni componenti hanno la medesima qualità.

La proposizione bicondizionale costituita dalle due proposizioni semplici p e q si indica con:

$$p \leftrightarrow q,$$

e si legge:

"*p* **se e solo se** *q*".

Si hanno le seguenti tabelle di verità:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Come nel caso del condizionale, anche in questo del bicondizionale, fra le proposizioni componenti può non sussistere nessuna dipendenza logica.

ESEMPI

1.	p	" La Senna bagna Parigi"	V
	q	" Il Lazio è una regione italiana "	V
	$p \leftrightarrow q$	" La Senna bagna Parigi **se e solo se** il Lazio è una regione italiana "	V
2.	p	" Firenze è una città"	V
	q	" La neve è nera "	F
	$p \leftrightarrow q$	" Milano è una città **se e solo se** la neve è nera "	F
3.	p	" L'Arno è un lago "	F
	q	" Torino è una città"	V
	$p \leftrightarrow q$	" l'Arno è un lago **se e solo se** Torino è una città"	F
4.	p	" Il cerchio è un poligono "	F
	q	" Il quadrato ha tre lati "	F
	$p \leftrightarrow q$	" Il cerchio è un poligono **se e solo se** il quadrato ha tre lati "	V